UNIVERZITA PALACKÉHO v OLOMOUCI

Přírodovědecká fakulta, Katedra algebry a geometrie

Grafy a Sítě II

19. marca 2021

Jozef Pócs

Obsah

Kapitola 1

Orientované grafy

1.1 Úvodné definície a pojmy

Orientovaným grafom alebo *digrafom* (skratka z anglického pojmu *di*rected *graph*) rozumieme usporiadanú dvojicu $D = (V(D), A(D))$, kde $V(D) \neq \emptyset$ je množina vrcholov a $A(D) \subseteq \{(u, v) \in V \times V : u \neq v\}$ je množina *orientovaných hrán* alebo *šípok* (v angličtine sa pre orientovanú hranu používa pojem arc). Poznamenajme, že v orientovanom grafe nepripúšťame ani násobné orientované hrany, ani slučky. Ak v definícii pripustíme viacnásobné orientované hrany a slučky, potom hovoríme o *orientovanom pseudografe*, orientovaný pseudograf bez slučiek sa nazýva *orientovaným multigrafom.*

Pre orientovanú hranu $a = (u, v)$ povieme, že vrchol u je *začiatočný* a v *koncový* vrchol orientovanej hrany a, respektíve a je orientovaná z u do v. Taktiež hovoríme, že v je *nasledovníkom* vrchola u (v *dominuje* u) a u je *predchodcom* vrchola v (u *je dominovaný* v). Vrcholy u a v sa nazývajú *koncovými* vrcholmi šípky $a = (u, v)$ a taktiež povieme, že u a v sú *susedné* a vrchol u, resp. v, je *incidentný* s orientovanou hranou a. Fakt, že vrcholy u a v tvoria šípku orientovanú z u do v budeme taktiež značiť ako $u \to v$.

Pre dvojicu podmnožín X, Y vrcholovej množiny digrafu D definujeme

$$(X, Y)_D = \{(x, y) \in A(D) : x \in X, y \in Y\},$$

t.j., $(X, Y)_D$ reprezentuje množinu šípok so začiatkom v X a koncom v Y.

V nasledujúcich definíciách, ak nebude stanovené inak, $D = (V, A)$ je orientovaný pseudograf. Pre vrchol $v \in V$ budeme používať nasledujúce označenia:

$$N_D^+(v) = \big\{u \in V \setminus \{v\} : (v, u) \in A\big\},\ N_D^-(v) = \big\{w \in V \setminus \{v\} : (w, v) \in A\big\}.$$

Množiny $N_D^+(v)$, $N_D^-(v)$ a $N_D(v) = N_D^+(v) \cup N_D^-(v)$ sa nazývajú *výstupní susedia*, *vstupní susedia* a *susedia* vrchola v. Pre podmnožinu $W \subseteq V$ vrcholov položíme

$$N_D^+(W) = \bigcup_{w \in W} N_D^+(w) \setminus W,\ N_D^-(W) = \bigcup_{w \in W} N_D^-(w) \setminus W.$$

Napríklad to znamená, že množina $N_D^+(W)$ pozostáva z tých vrcholov z $V \setminus W$, ktoré sú výstupným susedom aspoň jedného vrchola z množiny W.

Pre podmnožinu $W \subseteq V$ definujeme *výstupný stupeň* množiny W ako $\deg_D^+(W) = |(W, V \setminus W)_D|$, t.j. výstupný stupeň W je počet šípok v $A(D)$, ktorých začiatok je v W a koniec v množine $V \setminus W$. *Vstupný stupeň* W je definovaný ako $\deg_D^-(W) = |(V \setminus W, W)_D|$. Špeciálne, pre vrchol $v \in V$ je výstupný stupeň rovný počtu šípok, okrem slučiek, ktorých začiatok je v. Ak D je digraf (neobsahuje slučky ani násobné šípky), tak výstupný stupeň vrchola v je rovný počtu jeho výstupných susedov. *Stupeň* W je definovaný ako súčet výstupného a vstupného stupňa, t.j. ako číslo $\deg_D(W) = \deg_D^+(W) + \deg_D^-(W)$. Hodnoty $\deg_D^+(W)$ a $\deg_D^-(W)$ sa zvyknú nazývať ako *polostupne*. Vrchol v orientovaného pseudografu D sa nazýva *prameňom* alebo *zdrojom* (*ústim* alebo *stokom*), ak nemá vstupných susedov (výstupných susedov).

Minimálny výstupný stupeň (*minimálny vstupný stupeň*) D je definovaný ako

$$\delta^+(D) = \min\{\deg_D^+(v) : v \in V(D)\}, \ \big(\delta^-(D) = \min\{\deg_D^-(v) : v \in V(D)\}\big).$$

Minimálny polostupeň je definovaný ako $\delta^0(D) = \min\{\delta^+(D), \delta^-(D)\}$.

Podobne sa definuje *Maximálny výstupný stupeň* $\Delta^+(D)$ a (*maximálny vstupný stupeň*) $\Delta^-(D)$. *Maximálny polostupeň* sa definuje ako $\Delta^0(D) = \max\{\Delta^+(D), \Delta^-(D)\}$.

Povieme, že D je *regulárny*, ak $\delta^0(D) = \Delta^0(D)$. V tomto prípade sa D nazýva aj $\delta^0(D)$-regulárny.

Nakoľko počet šípok v orientovanom multigrafe je rovný počtu ich začiatkov (alebo ich koncov), dostávame nasledujúcu analógiu známeho vzťahu týkajúceho sa jednoduchých grafov.

Veta 1.1. *Nech $D = (V, A)$ je orientovaný multigraf. Potom*

$$\sum_{v \in V} \deg_D^-(v) = \sum_{v \in V} \deg_D^+(v) = |A(D)|. \tag{1.1}$$

Digraf H sa nazýva *poddigrafom* digrafu D ak $V(H) \subseteq V(D)$ a $A(H) \subseteq A(D) \cap V(H) \times V(H)$. Ak $V(H) = V(D)$, tak H sa nazýva *faktorovým* poddigrafom. Ak každá orientovaná hrana z $A(D)$, majúca obidva konce vo $V(H)$ je aj v $A(H)$, tak H je *(vrcholovo) indukovaným* poddigrafom D. Poddigraf digrafu D indukovaný množinou vrcholov X budeme označovať symbolom $D[X]$. Pre podmnožinu šípok $A' \subseteq A(D)$ poddigraf $D[A'] = (V', A')$, kde V' je množina vrcholov z V, incidujúca s aspoň jednou hranou z A', sa nazýva *hranovo (šípovo) indukovaný* množinou A'.

Nech D a H sú digrafy (resp. orientované pseudografy). Povieme, že D a H sú *izomorfné* (označujeme $D \cong H$), ak existuje bijekcia $\phi\colon V(D) \to V(H)$ taká, že pre všetky dvojice vrcholov $u, v \in V(D)$ platí $(u, v) \in A(D)$ práve vtedy, keď $(\phi(u), \phi(v)) \in A(H)$ (v prípade orientovaných pseudografov $\mu_D(u, v) = \mu_H(\phi(u), \phi(v))$, kde μ označuje násobnosť danej šípky).

Jednou zo základných operácií na orientovanom pseudografe D je zmena orientácie, alebo otočenie šípky. *Otočením* šípky $a = (u, v)$ v D rozumieme nahradenie a opačnou šípkou (v, u). *Otočením orientovaného multigrafu* D rozumieme orientovaný multigraf H, ktorý je získaný otočením každej šípky v D.

Biorientácia a orientácia grafu

Pripomíname, že pod *neorientovaným grafom* (skrátene *grafom*) rozumieme usporiadanú dvojicu $G = (V(G), E(G))$, kde $V(G)$ je množina vrcholov a $E(G) \subseteq \binom{V(G)}{2}$ je množina (neorientovaných) hrán. Pojem multigrafu a pseudografu je definovaný analogicky ako v prípade orientovaných multigrafov, resp. pseudografov, t.j. pripúšťame neorientované multihrany, resp. naviac aj neorientované slučky.

Nech je daný pseudograf G. Orientovaný pseudograf D sa nazýva *biorientáciou* G, ak D vznikne z G nahradením každej hrany $\{x, y\}$ buď orientovanou hranou (x, y) alebo (y, x) alebo dvojicou protismerných hrán (x, y) a (y, x) (okrem prípadu orientovanej slučky $\{x, x\}$, ktorá je nahradená orientovanou slučkou (x, x)). Poznamenávame, že rôzne kópie hrany $\{x, y\}$ môžu byť nahradené rôznymi šípkami v D. Napríklad, ak pre multiplicitu hrany $\{x, y\}$ v G platí $\mu_G(x, y) = 3$, tak jedna kópia hrany $\{x, y\}$ môže byť nahradená šípkou (x, y), ďalšia šípkou (y, x) a tretia dvojicou šípok (x, y) a (y, x).

Pod *orientáciou* grafu G rozumieme zámenu každej neorientovanej hrany za orientovanú, teda formálne digraf D, ktorý je biorientáciou G s vlastnosťou $(x, y) \in A(D)$ implikuje $(y, x) \notin A(D)$ (D je biorientáciou G, neobsahujúcou žiadnu dvojicu protismerných šípok). V tomto prípade tiež hovoríme, že D je *grafom s orientáciou* (ang. oriented graph).

Je jasné, že každý digraf je biorientáciou nejakého jednoznačne daného grafu. Tento graf nazývame *podkladovým grafom* (ang. underlying graph) digrafu D a značíme ho symbolom $\mathsf{UG}(D)$. Podkladový graf $\mathsf{UG}(D)$ získame jednoducho, a to nahradením každej šípky (x, y) (resp. dvojice protismerných šípok (x, y) a (y, x)) v D hranou $\{x, y\}$.

Sledy, ťahy, cesty a kružnice v orientovaných grafoch

V ďalšom, ak nie je špecifikované ináč, D označuje orientovaný pseudograf. *Orientovaným sledom* rozumieme striedavú postupnosť $S = x_1a_1x_2a_2x_3 \dots x_{k-1}a_{k-1}x_k$ vrcholov $x_i \in V(D)$ a šípok $a_j \in A(D)$ takých, že začiatkom a_i je vrchol x_i a koncom x_{i+1} pre všetky indexy $i = 1, \dots, k-1$ (namiesto termínu orientovaný sled budeme používať iba termín sled, ak bude jasné, že uvažujeme nejaký typ orientovaného grafu, multigrafu alebo pseudografu). V tomto prípade hovoríme, že sled S je tzv. (x_1, x_k)-sledom. Ak označenie šípok v slede nehrá rolu, budeme sled označovať iba ako postupnosť vrcholov, t.j. $S = x_1x_2 \dots x_k$. Sled S je *uzavretý* ak $x_1 = x_k$, ináč sa nazýva *otvorený*. Ak S je otvorený sled, povieme, že x_1 je *počiatočným (iniciálnym)* vrcholom sledu S, a vrchol x_k *koncovým (terminálnym)* vrcholom sledu S. *Dĺžkou* sledu označujeme počet jeho šípok.

Orientovaným ťahom (skrátene ťahom) rozumieme sled, v ktorom sa šípky neopakujú. Ak sa v ťahu neopakujú ani vrcholy, hovoríme o *orientovanej ceste* (skrátene ceste). Ak vrcholy $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{k-1}$ uzavretého sledu $S = x_1x_2 \dots x_k$ sú rôzne, $k \geq 3$, $x_1 = x_k$, tak S je *orientovaný cyklus (kružnica)* (skrátene cyklus). Pozn. v prípade orientovaného pseudografu, slučku považujeme za 1-cyklus. Na rozdiel od jednoduchých (neorientovaných) grafov, v digrafoch môžu existovať cykly dĺžky 2, tzv. 2-cykly.

Tvrdenie 1.2. *Nech D je digraf a $x, y \in V(D)$ je dvojica rôznych vrcholov. Ak S je (x, y)-sled v D, tak v D existuje (x, y)-cesta P, spĺňajúca $A(P) \subseteq A(S)$. Ak v D existuje uzavretý (x, x)-sled S, tak D má cyklus C obsahujúci x, pričom $A(C) \subseteq A(S)$.*

Dôkaz. Uvažujme sled P začínajúci v x a končiaci v y, pričom P má najmenšiu dĺžku spomedzi všetkých (x, y)-sledov, ktorých šípky sú z množiny $A(S)$. Ukážeme, že P je cesta. Nech $P = x_1x_2 \ldots x_k$, kde $x_1 = x$ a $x_k = y$. Ak by platilo $x_i = x_j$ pre nejaké $1 \leq i < j \leq k$, potom by sled $P' = x_1 \ldots x_ix_{j+1} \ldots x_k$ bol kratší ako P, čo predstavuje spor. Teda všetky vrcholy P sú rôzne, následne P je cesta v D s $A(P) \subseteq A(S)$.

Nech $S = z_1z_2 \ldots z_k$ je uzavretý sled s vlastnosťou $z_1 = x = z_k$. Keďže D neobsahuje slučky, $z_{k-1} \neq z_k$. Nech $y_1y_2 \ldots y_t$, kde $y_1 = x$, $y_t = z_{k-1}$ je najkratší (x, z_{k-1})-sled s hranami z $A(S)$. Vzhľadom na vyššie dokázaný výsledok $y_1y_2 \ldots y_t$ tvorí cestu, teda $y_1y_2 \ldots y_ty_1$ je cyklus obsahujúci $y_1 = x$ s požadovanou vlastnosťou. □

1.2 Acyklické digrafy

Digraf D je *acyklický*, ak neobsahuje žiadny cyklus. Pripomíname, že vrchol $v \in V(D)$ je prameňom (resp. ústim), ak $\deg^-(v) = 0$ (resp. $\deg^+(v) = 0$).

Tvrdenie 1.3. *Každý acyklický graf obsahuje prameň a ústie.*

Dôkaz. Ukážeme, že ak digraf D nemá ústie, tak obsahuje cyklus. Nech D je digraf, v ktorom všetky vrcholy majú kladný výstupný stupeň. Vyberme ľubovoľný vrchol v_1. Keďže $\deg^+(v_1) > 0$, tak existuje v_2, pričom $v_1 \to v_2$. Podobne $\deg^+(v_2) > 0$ a teda $v_2 \to v_3$ pre nejaký vrchol v_3. Takto postupne získame sled v tvare $v_1v_2 \ldots v_k$. Nakoľko $A(D)$ je konečná množina, existuje najmenšie $k > 2$, spĺňajúce $v_k = v_i$ pre nejaké $1 \leq i < k$. Je zrejmé, že $v_iv_{i+1} \ldots v_k$ tvorí cyklus v D.

Teda acyklický digraf musí obsahovať ústie. Keďže otočenie H digrafu D je tiež acyklický digraf, H obsahuje ústie v. Je jasné, že vrchol v prameňom v D. □

Predchádzajúce tvrdenie umožnuje nájsť jednoduchú procedúru na overenie, či daný digraf je acyklický:

1. Ak D obsahuje vrchol v s $\deg^+_D(v) = 0$, potom uvažujme digraf $D - v$.
2. V opačnom prípade D obsahuje cyklus.

Tvrdenie 1.4. *Nech D je digraf s práve jedným prameňom x, resp. práve jedným ústim y. Potom pre ľubovoľný vrchol $v \in V(D)$ existuje (x, v)-cesta, resp. (v, y)-cesta v D.*

Dôkaz. Uvažujme najdlhšiu cestu začínajúcu vo vrchole v. Ak by jej koncovým vrcholom nebolo ústie y, tak buď by bolo možné túto cestu predĺžiť, alebo by v D existoval cyklus. Teda uvažovaná cesta je (v, y)-cestou v D.

Podobne najdlhšia cesta končiaca vo v je (x, v)-cestou v digrafe D. □

Nech D je digraf a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ očíslovanie jeho vrcholov. Povieme, že toto očíslovanie je *acyklické očíslovanie*, ak pre každú šípku $x_i \to x_j$ v D platí, že $i < j$. Je pomerne zrejmé, že acyklické očíslovanie digrafu D indukuje acyklické očíslovanie každého jeho poddigrafu H. Keďže žiadny cyklus nepripúšťa acyklické očíslovanie, taktiež v žiadnom digrafe obsahujúcom cyklus nemôže existovať takéto očíslovanie. Na druhej strane, platí nasledujúca veta.

Veta 1.5. *Každý acyklický digraf má acyklické očíslovanie svojich vrcholov.*

Dôkaz. Podáme konštruktívny dôkaz, t.j. popíšeme procedúru, ktorá nájde acyklické očíslovanie vrcholov acyklického digrafu D. Vzhľadom na Tvrdenie 1.3, v prvom kroku vyberieme vrchol v s nulovým vstupným stupňom (prameň). Položíme $x_1 = v$ a odstránime x_1 z $D = D_0$, t.j. položíme $D_1 = D - x_1$. Predpokladajme, že je vykonaných i krokov, $i \geq 1$. V kroku $i+1$ nájdeme vrchol u s $\deg^-_{D_i}(u) = 0$, t.j. prameň v digrafe D_i, položíme $x_{i+1} = u$ a $D_{i+1} = D_i - x_{i+1}$. Táto procedúra skončí po $|V(D)|$ krokoch.

Dokážeme korektnosť tejto procedúry, to znamená, že nájdené očíslovanie je acyklické. Predpokladajme $x_i \to x_j$ v D, avšak $i > j$. V tomto prípade vrchol x_j bol vybratý pred vrcholom x_i, teda $x_i \in V(D_{j-1})$. To je však v spore s tým, že $\deg^-_{D_{j-1}}(x_j) = 0$, keďže $(x_i, x_j) \in A(D_{j-1})$. □

1.3 Silná, unilaterálna a slabá súvislosť

V digrafe D je vrchol $y \in V(D)$ *dosiahnuteľný* z vrchola $x \in V(D)$, ak v D existuje (x,y)-sled. Špeciálne, každý vrchol je dosiahnuteľný sám zo seba. Vzhľadom na Tvrdenie 1.2, vrchol y je dosiahnuteľný z x práve vtedy, keď v D existuje (x,y)-cesta.

Digraf D sa nazýva *silne súvislý* (skrátene len *silný*), ak pre ľubovoľnú dvojicu $x, y \in V(D)$ rôznych vrcholov v D existuje (x,y)-sled a takisto (y,x)-sled. Inými slovami, D je silný, ak ľubovoľný vrchol v D je dosiahnuteľný z každého iného vrchola patriaceho do D. Definitoricky, digraf s jediným vrcholom je silne súvislý.

Tvrdenie 1.6. *Digraf D je silný práve vtedy, keď D obsahuje uzavrený sled obsahujúci všetky vrcholy.*

Dôkaz. Predpokladajme, že $S = u_1 u_2 \ldots u_k u_1$ je uzavrený sled obsahujúci všetky vrcholy. Nech $u, v \in V(D)$ je dvojica rôznych vrcholov. Potom $u = u_i$ a $v = u_j$ pre nejaké $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq k$. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $i < j$. Potom $u_i u_{i+1} \ldots u_j$ je (u,v)-sled v D a $u_j \ldots u_k u_1 \ldots u_i$ je (v,u)-sled v D, čo znamená, že D je silný.

Naopak, nech D je netriviálny silný digraf s vrcholmi $V(D) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Uvažujme cyklickú postupnosť vrcholov $v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1} = v_1$. Keďže D je silný, pre všetky $i = 1, \ldots, n$ v D existuje (v_i, v_{i+1})-sled (ako aj cesta) P_i. Následne zreťazenie $S = P_1 P_2 \ldots P_n$ tvorí uzavrený sled obsahujúci všetky vrcholy. □

Pre silný digraf $D = (V, A)$ sa množina $S \subset V$ nazýva *separujúcou*, ak $D - S$ nie je silný. Digraf D je *k-silne súvislý* (skrátene *k-silný*), ak $|V| \geq k+1$ a D neobsahuje žiadnu separujúcu množinu s menej ako k vrcholmi. Najväčšie celé číslo k také, že D

je k-silne súvislý sa nazýva číslo *vrcholovej silnej súvislosti* a označuje sa symbolom $\kappa(D)$. Ak D nie je silný, definitoricky položíme $\kappa(D) = 0$.

Pre dvojicu s, t rôznych vrcholov digrafu D povieme, že množina vrcholov $S \subseteq V(D) \setminus \{s, t\}$ je (s,t)-*separujúca*, ak $D - S$ neobsahuje žiadnu (s,t)-cestu. Pre silný digraf $D = (V, A)$ sa množina šípok $W \subseteq A$ nazýva *rezom* (*rezovou množinou*), ak $D - W$ nie je silný. Digraf D sa nazýva k-*šípkovo silne súvislý* (k-*šípkovo silný*), ak D neobsahuje rez s menej ako k šípkami. Najväčšie celé číslo k také, že D je k-šípkovo silne súvislý sa nazýva číslo *šípkovej silnej súvislosti* a označuje sa symbolom $\lambda(D)$. Ak D nie je silný, položíme $\lambda(D) = 0$. Poznamenávame, že $\lambda(D) \geq k$ práve vtedy, keď $\deg^+(X), \deg^-(X) \geq k$ pre každú vlastnú podmnožinu $X \subset V(D)$.

Silný komponent digrafu D je maximálny silný poddigraf digrafu D, t.j. silný poddigraf taký, že žiadny jeho naddigraf v rámci D už nie je silný. Ak $D_1, D_2, \ldots, D_t$ sú všetky silné komponenty digrafu D, tak $V(D_1) \cup V(D_2) \cup \cdots \cup V(D_t) = V(D)$ (pripomíname, že digraf s jedným vrcholom je silný). Naviac musí platiť $V(D_i) \cap V(D_j) = \emptyset$ pre všetky $i \neq j$, ináč by všetky vrcholy z množiny $V(D_i) \cup V(D_j)$ boli navzájom dosažiteľné jeden z druhého a teda vrcholy z $V(D_i) \cup V(D_j)$ by patrili do rovnakého silného komponentu. Systém $D_1, D_2, \ldots, D_t$ sa nazýva *silným rozkladom* digrafu D. *Digraf silných komponentov* $\mathsf{SC}(D)$ digrafu D je získaný kontrakciou každého silného komponentu do jediného vrchola a vymazaním viacnásobných paralelných hrán, ktoré vzniknú pri tomto procese. Inými slovami, ak $D_1, D_2, \ldots, D_t$ sú silné komponenty D, tak $V(\mathsf{SC}(D)) = \{v_i : i = 1, \ldots, t\}$ a $A(\mathsf{SC}(D)) = \{(v_i, v_j) : (V(D_i), V(D_j))_D \neq \emptyset\}$. Poddigraf každého digrafu indukovaný vrcholmi ležiacimi na nejakom orientovanom cykle je silný, následkom čoho je digraf $\mathsf{SC}(D)$ acyklický. Teda vzhľadom na Vetu 1.5, vrcholy digrafu $\mathsf{SC}(D)$ majú acyklické očíslovanie. To znamená, že silné komponenty digrafu D je možné očíslovať $D_1, D_2, \ldots, D_t$ takým spôsobom, že v D existuje šípka z D_i do D_j jedine ak $i < j$.

Digraf D sa nazýva *unilaterálne súvislý* (jednostranne súvislý), ak pre každú dvojicu vrcholov x a y z $V(D)$ platí, že y je dosažiteľný z x, alebo x je dosažiteľný z y (môžu platiť aj obe možnosti). Je zrejmé, že každý silný digraf je unilaterálny. Je vidieť, že orientovaná cesta je unilaterálny digraf. Z tohto dôvodu, je napríklad unilateralita nutnou podmienkou pre existenciu Hamiltonovskej cesty v digrafe.

V nasledujúcom tvrdení podáme charakterizáciu unilaterálnych digrafov.

Tvrdenie 1.7. *Digraf D je unilaterálny práve vtedy, keď digraf jeho silných komponentov $\mathsf{SC}(D)$ je acyklický a má orientovanú Hamiltonovskú cestu.*

Dôkaz. Predpokladajme, že $\mathsf{SC}(D)$ má Hamiltonovskú cestu . Nech $D_1, D_2, \ldots, D_t$ je rozklad D na silné komponenty, pričom dané poradie komponentov je zhodné s poradím komponentov na príslušnej orientovanej Hamiltonovskej ceste v $\mathsf{SC}(D)$. Potom $D_i \to D_{i+1}$ v $\mathsf{SC}(D)$, čo znamená $(V(D_i), V(D_{i+1}))_D \neq \emptyset$ pre všetky $i = 1, \ldots, t-1$. Nech $x, y \in V(D)$ sú ľubovoľné vrcholy. Potom $x \in D_i$ a $y \in D_j$ pre nejaké i, j. Ak $i = j$ tak evidentne y je dosiahnuteľný z x, keďže oba vrcholy sú z rovnakého silného komponentu. Bez ujmy na všeobecnosti teda môžme predpokladať $i < j$. Pre všetky $i \leq l < j$ označme $a_l = (u_l, v_{l+1})$ šípku spájajúcu D_l s D_{l+1} a pre $i < l < j$ nech S_l označuje (v_l, u_l)-sled v D_l. Naviac S_i označuje (x, u_i)-sled v D_i a S_j (v_j, y)-sled v D_j. Potom zreťazenie sledov S_l pomocou šípok a_l dáva (x, y)-sled $S_i a_i S_{i+1} a_{i+1} \ldots a_{l-1} S_l a_l \ldots a_{j-1} S_j$ v D, čo ukazuje, že D je unilaterálny.

Naopak, nech D je unilaterálny a $D_1, D_2, \ldots, D_t$ je acyklické očíslovanie jeho silných komponentov. Ak by pre nejaké i platilo $(V(D_i), V(D_{i+1}))_D = \emptyset$, tak žiadny vrchol z $V(D_{i+1})$ by nebol dosiahnuteľný z akéhokoľvek vrchola z $V(D_i)$ a naopak. Teda $D_i \to D_{i+1}$ v $\mathsf{SC}(D)$ pre všetky $i = 1, \ldots, t-1$, čo znamená, že $D_1 D_2 \ldots D_t$ je Hamiltonovská cesta. □

Povieme, že graf má silnú orientáciu, ak existuje orientácia jeho hrán takým spôsobom, že príslušný digraf (graf s orientáciou) je silne súvislý.

Veta 1.8 (**G. Robbins**, 1939). *Netriviálny graf má silnú orientáciu práve vtedy, keď je súvislý a neobsahuje most.*

Poznámka: Ak G je súvislý graf bez mostov, tak je tzv. hranovo 2-súvislý. Podľa Mengerovej vety, graf je hranovo k-súvislý práve vtedy, keď medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi v G existuje aspoň k hranovo disjunktných ciest.

Dôkaz. Je jasné, že ak graf má silnú orientáciu, tak je súvislý. Ak by v nôm existovala hrana e, ktorá je mostom, tak vrcholy z rôznych komponentov $G - e$ (vzniknutých po odstránení mosta) by neboli obojstanne dosiahnuteľné (každý sled využíva e, teda orientovaný sled by bolo možné nájsť najviac ak jedným smerom).

Naopak, sporom predpokladajme, že existuje súvislý graf G bez mostov, pre ktorý neexistuje jeho silná orientácia. Nech H je podgraf G s maximálnym počtom vrcholov spomedzi tých podgrafov, pre ktoré existuje silná orientácia. Takýto podgraf musí existovať, pretože pre všetky vrcholy $v \in V$, indukovaný podgraf $G[\{v\}]$ triviálne má silnú orientáciu. Potom platí $|V(H)| < |V(G)|$, keďže predpokladáme, že G nemá silnú orientáciu.

Zorientujme hrany podgrafu H tak, aby takto vzniknutý digraf D bol silný, avšak hrany z $E(G) \setminus E(H)$ ostanú bez orientácie. Nech $u \in V(H)$ a $v \in V(G) \setminus V(H)$. Nakoľko G je súvislý a bez mostov, tak v G existuje dvojica hranovo disjunktných $u-v$ ciest. Nech P je jedna z týchto $u - v$ ciest a Q je opačná $v - u$ cesta, získaná otočením druhej z týchto $u - v$ ciest. Ďalej, nech u_1 je posledný vrchol z P, ktorý patrí do $V(H)$ a v_1 je prvý vrchol z Q, ktorý patrí do $V(H)$. Označme P_1 ako $u_1 - v$ podcestu cesty P a Q_1 ako $v - v_1$ podcestu cesty Q. Zorientujme hrany P_1 od u_1 smerom k v, čím vytvoríme orientovanú (u_1, v)-cestu P_1' a taktiež zorientujme hrany Q_1 od v smerom k v_1, čím získame orientovanú (v, v_1)-cestu Q_1'.

Definujme digraf D' nasledovne:

$$V(D') = V(D) \cup V(P_1') \cup V(Q_1') \ \text{ a } \ A(D') = A(D) \cup A(P_1') \cup A(Q_1').$$

Keďže D je silný, D' je taktiež silný, čo je ovšem v rozpore s voľbou podgrafu H. □

Najslabším pojmom súvislosti v rámci teórie orientovaných grafov je pojem slabej súvislosti digrafov, odvodený od pojmu súvislosti v jednoduchých neorientovaných grafoch. V tomto prípade povieme, že digraf D je *slabo súvislý* (skrátene len *súvislý*), ak príslušný podkladový graf $\mathsf{UG}(D)$ je súvislý.

1.4 Turnaje

Turnaj je graf s orientáciou, kde každá dvojica vrcholov susedí, t.j. turnaj vznikne orientáciou úplného grafu. Inými slovami, digraf T s množinou vrcholov $V(T) = \{v_i : i = 1, \dots, n\}$ je turnajom, ak práve jedna zo šípok (v_i, v_j) alebo (v_j, v_i) je v T pre všetky indexy $i \neq j$.

Veta 1.9. *Každý turnaj obsahuje orientovanú Hamiltonovskú cestu.*

Dôkaz. Nech T je turnaj s $V(T) = \{v_i : i = 1, \dots, n\}$, pričom predpokladajme, že vrcholy T sú očíslované takým spôsobom, že počet spätných šípok, t.j. šípok v tvare $v_j \to v_i$ pre $j > i$, je minimálny. Potom $v_1 v_2 \dots v_n$ je Hamiltonovská cesta v T.

Ak by to tak nebolo, potom by existoval index $i < n$ taký, že $(v_i, v_{i+1}) \notin A(T)$ a teda by platilo $(v_{i+1}, v_i) \in A(T)$. Avšak v tomto prípade, vymenením poradia vrcholov v_i a v_{i+1} získame očíslovanie, ktoré by malo menší počet spätných šípok, čo predstavuje spor. □

Povieme, že n vrcholový digraf je *vrcholovo pancyklický*, ak pre každý vrchol $x \in V(D)$ a každú hodnotu $k \in \{3, 4, \dots, n\}$, v D existuje k-cyklus obsahujúci x.

Veta 1.10. *Každý silný turnaj je vrcholovo pancyklický.*

Dôkaz. Nech x je vrchol silného turnaja T, ktorý má $n \geq 3$ vrcholov. Tvrdenie dokážeme indukciou vzhľadom na dĺžku cyklu k.

Ako prvé dokážeme, že v T existuje 3-cyklus obsahujúci x. Keďže T je silný, obe množiny $O = N^+(x)$ a $I = N^-(x)$ sú neprázdne. Naviac (O, I) je neprázdna množina šípok. Nech $(y, z) \in (O, I)$ je jedna z nich. Potom $xyzx$ je 3-cyklus obsahujúci vrchol x. Ďalej predpokladajme, že $C = x_0 x_1 \dots x_t$ je cyklus dĺžky t, $t \in \{3, 4, \dots, n-1\}$ s $x_0 = x = x_t$. Ukážeme, že v T existuje $(t+1)$-cyklus obsahujúci x.

Ak existuje vrchol $y \in V(T) \setminus V(C)$ taký, že y dominuje nejaký vrchol v C a zároveň je dominovaný nejakým iným vrcholom v C, potom musí existovať index i taký, že $(x_i, y) \in A(T)$ a $(y, x_{i+1}) \in A(T)$. Následne $x_0 \dots x_i y x_{i+1} \dots x_t$ tvorí cyklus dĺžky $t+1$ prechádzajúci x. V ďalšom teda môžme predpokladať, že každý vrchol mimo C buď dominuje všetky vrcholy v C, alebo je dominovaný všetkými vrcholmi v C. Vrcholy z $V(T) \setminus V(C)$ dominujúce všetky vrcholy $V(C)$ označme ako R, ostatné vrcholy z $V(T) \setminus V(C)$ označme ako S. Keďže T je silný S a R sú neprázdne a taktiež (S, R) musí byť neprázdna. Potom pre ľubovoľnú šípku $(s, r) \in (S, R)$ platí, že $x_0 s r x_2 \dots x_0$ je $(t+1)$-cyklus obsahujúci vrchol x. □

Dôsledok 1.11. *Každý silný turnaj je Hamiltonovský.*

V skutočnosti je možné predchádzajúcu vetu rozšíriť na triedu tzv. semiúplných digrafov. Digraf D je *semiúplný*, ak každá dvojica vrcholov v D susedí. Teda v semiúplnom grafe je medzi ľubovoľnou dvojicou vrcholov buď jedna šípka, alebo dvojica protismerných šípok.

Digraf je *úplný*, ak pre každú dvojicu $x, y \in V(D)$ rôznych vrcholov platí $(x, y) \in A(D)$ a $(y, x) \in A(D)$. Úplný digraf na n vrcholoch budeme značiť symbolom $\overleftrightarrow{K}_n$. Čo sa týka vzťahov medzi množinami šípok pre digrafy z danej triedy, ktoré sú definované na fixnej množine vrcholov, platí

$$A(\text{turnaj}) \ \subseteq\ A(\text{semiúplný}) \ \subseteq\ A(\text{úplný}).$$

Veta 1.12. *Každý silný semiúplný digraf je vrcholovo pancyklický.*

Dôkaz. Dôkaz tohto tvrdenia vyplýva z Vety 1.10 a faktu, že ak D je silný semiúplný digraf a $a_1 = (x, y)$, $a_2 = (y, x)$ dvojica protismerných šípok, tak potom aspoň jeden z digrafov $D - a_1$, $D - a_2$ je silný. Týmto spôsobom, po konečnom počte krokov, získame silný turnaj, ktorý je poddigrafom semiúplného digrafu. □

Uvedieme, ešte jeden výsledok, týkajúci sa počtu Hamiltonovských ciest.

Veta 1.13. *Pre každé $n \geq 2$ existuje turnaj na n vrcholoch, majúci aspoň $\frac{n!}{2^{n-1}}$ orientovaných Hamiltonovských ciest.*

Tranzitívne turnaje

Turnaj T sa nazýva *tranzitívny*, akonáhle (u, v) a (v, w) sú šípky v T, tak (u, w) je tiež šípkou v T.

Veta 1.14. *Turnaj je tranzitívny práve vtedy, keď je acyklický.*

Dôkaz. Nech T je acyklický turnaj a $(u, v) \in A(T)$ a $(v, w) \in A(T)$ sú šípky. Keďže T neobsahuje cyklus, $(w, u) \notin A(T)$. Teda $(u, w) \in A(T)$ a T je tranzitívny.

Naopak predpokladajme, že T je tranzitívny turnaj, pričom v T existuje cyklus $C = v_1v_2 \dots v_kv_1$, $k \geq 3$. Keďže (v_1, v_2) a (v_2, v_3) sú šípky v T, z tranzitívnosti dostávame, že (v_1, v_3) je tiež šípka v T. Podobne $(v_1, v_3) \in A(T)$ a $(v_3, v_4) \in A(T)$ implikuje $(v_1, v_4) \in A(T)$. Týmto spôsobom postupne dostávame, že $(v_1, v_2), (v_1, v_3), \dots, (v_1, v_k)$ sú šípky v T. To je však v rozpore s tým, že $(v_k, v_1) \in A(T)$, teda T je acyklický. □

Digraf silných komponentov je vo všeobecnosti acyklický a naviac medzi silnými komponentami turnaja je vždy nejaká šípka (protismerné nemôžu byť). Je teda ľahké vidieť, že digraf silných komponentov turnaja je acyklický turnaj. Následkom toho existuje jednoznačné acyklické očíslovanie silných komponentov turnaja T, menovite $T_1, T_2, \dots, T_t$, spĺňajúce $T_i \to T_j$ pre všetky $i < j$. Podľa predošlej vety teda platí, že $\mathsf{SC}(T)$ je tranzitívny turnaj.

Pre vrchol $v \in V(T)$ turnaja T, sa výstupný stupeň $\deg_T^+(v)$ tiež nazýva *skóre* vrchola v. Postupnosť nezáporných celých čísel $s_1, s_2, \dots, s_n$ sa nazýva *postupnosťou skóre turnaja*, ak existuje turnaj n vrcholový turnaj T, ktorého vrcholy je možné očíslovať $v_1, v_2, \dots, v_n$ tak, že $\deg_T^+(v_i) = s_i$ pre všetky $i = 1, \dots, n$.

Veta 1.15. *Neklesajúca postupnosť $s_1, s_2, \dots s_n$ je postupnosťou skóre tranzitívneho turnaja práve vtedy, keď $s_i = i - 1$ pre všetky $i = 1, \dots, n$.*

Dôkaz. Ako prvé ukážeme, že postupnosť $0, 1, \ldots, n-1$ je postupnosťou skóre nejakého tranzitívneho turnaja. Definujme turnaj T nasledovne: $V(T) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ a $A(T) = \{(v_i, v_j) : 1 \leq i < j \leq n\}$. Je ľahko vidieť, že $\deg_T^+(v_i) = i - 1$ pre každé $i = 1, \ldots, n$. Ukážeme, že T je tranzitívny. Nech (v_i, v_j) a (v_j, v_k) tvoria šípky v T. Potom $i < j < k$ a teda $(v_i, v_k) \in A(T)$, čo znamená, že T je tranzitívny.

Naopak ukážeme, že ak T je tranzitívny turnaj, tak postupnosť $0, 1, \ldots, n-1$ je jeho postupnosťou skóre. To je ekvivalentné s tvrdením, že pre všetky dvojice vrcholov $u \neq v$ platí $\deg_T^+(u) \neq \deg_T^+(v)$. Nech u, v je dvojica rôznych vrcholov v T. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $u \to v$ je šípka. Potom pre každý vrchol $w \in N_T^+(v)$ z množiny výstupných vrcholov vrchola v dostávame $w \in N_T^+(u)$, keďže vďaka tranzitivite $(u, v) \in A(T)$ a $(v, w) \in A(T)$ implikuje $(u, w) \in A(T)$. Teda $\deg_T^+(u) = \left|N_T^+(u)\right| \geq \left|N_T^+(v)\right| + 1 > \deg_T^+(v)$. $\square$

Dôsledok 1.16. *Pre každé $n \in \mathbb{N}$ existuje (až na izomorfizmus) práve jeden tranzitívny (ekvivalentne acyklický) turnaj na n vrcholoch.*

Postupnosti skóre v turnajoch

Veta 1.17. *Neklesajúca postupnosť nezáporných čísel $\pi = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, $n \geq 2$, je postupnosťou skóre turnaja práve vtedy, keď postupnosť $\pi_1 = (s_1, \ldots, s_{s_n}, s_{s_n+1} - 1, \ldots, s_{n-1} - 1)$ je postupnosťou skóre turnaja.*

Dôkaz. Nech π_1 je postupnosť skoré nejakého turnaja T_1 majúceho $n-1$ vrcholov. Teda vrcholy turnaja T_1 môžu byť označené $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ tak, že

$$\deg^+(v_i) = \begin{cases} s_i & \text{pre } 1 \leq i \leq s_n, \\ s_i - 1 & \text{pre } i > s_n. \end{cases}$$

Turnaj T zostrojíme tak, že k T_1 pridáme nový vrchol v_n, pričom $v_n \to v_i$ ak $1 \leq i \leq s_n$ a $v_i \to v_n$ inak. Potom postupnosť π je postupnosťou skóre turnaja T.

Naopak predpokladajme, že π je postupnosťou skóre turnaja. Spomedzi všetkých n vrcholových turnajov, ktorých postupnosť skóre je π, nech T je taký, že $V(T) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $\deg^+(v_i) = s_i$, pričom súčet skóre výstupných susedov vrchola v_n je minimálny. Tvrdíme, že v T majú výstupný susedia vrchola v_n skóre $s_1, s_2, \ldots, s_{s_n}$. Sporom predpokladajme, že to nepatí, teda nie všetky vrcholy z množiny $N_T^+(v_n)$ majú skóre $s_1, s_2, \ldots, s_{s_n}$. Následne existujú vrcholy v_j a v_k, kde $j < k$ a $s_j < s_k$, pričom $v_j \to v_n$ a $v_n \to v_k$. Keďže skóre s_k prevyšuje s_j, v T musí existovať vrchol v_t taký, že $v_k \to v_t$ a $v_t \to v_j$. Spomínané vrcholy tvoria 4-cyklus $C = v_n v_k v_t v_j v_n$. Otočením každej šípky v rámci tohto cyklu, dostaneme turnaj T', ktorého postupnosť skóre je taktiež π. Avšak v T' platí $v_n \to v_j$, teda súčet skóre výstupných susedov v_n v T' je menší ako v T, čo je ovšem v spore s predpokladom o turnaji T. Teda, ako sme tvrdili, v T musia všetci nasledovníci vrchola v_n mať skóre $s_1, s_2, \ldots, s_{s_n}$. Potom turnaj $T - v_n$ má postupnosť skóre π_1.

$\square$

Veta 1.18. *Neklesajúca postupnosť nezáporných čísel* $\pi = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ *je postupnosťou skóre turnaja práve vtedy, keď*

$$\sum_{i=1}^{k} s_i \geq \binom{k}{2} \tag{1.2}$$

pre všetky k*,* $1 \leq k \leq n$*, pričom pre* $k = n$ *platí rovnosť.*

Veta 1.19. *Neklesajúca postupnosť nezáporných čísel* $\pi = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ *je postupnosťou skóre silného turnaja práve vtedy, keď*

$$\sum_{i=1}^{k} s_i > \binom{k}{2} \text{ pre } 1 \leq k \leq n-1 \quad \text{a} \quad \sum_{i=1}^{n} s_i = \binom{n}{2}.$$

Naviac, každý turnaj, ktorého postupnosť skóre spĺňa dané podmienky, je silný.

Králi v turnajoch

Vrchol turnaja $u \in V(T)$ sa nazýva *kráľom* v T, ak pre každý vrchol w rôzny od u platí buď $u \to w$, alebo existuje vrchol v taký, že $u \to v \to w$. Teda vrchol u v turnaji je kráľom, ak každý iný vrchol je dosiahnuteľný z u pomocou orientovanej cesty dĺžky najviac 2.

Veta 1.20. *V každom turnaji existuje kráľ.*

Dôkaz. Nech T je turnaj a u vrchol s maximálnym výstupným stupňom v T. Ukážeme, že u je kráľom v T. Ak by to neplatilo, v T by existoval vrchol w taký, že u nie je predchodca w (potom v T musí platiť $w \to u$) a zároveň w nie je následníkom žiadneho vrchola z $N^+(u)$ (t.j. v T platí $w \to v$ pre všetky $v \in N^+(u)$). To znamená, že w je predchodcom každého vrchola z $N^+(u)$ a taktiež $u \in N^+(w)$, t.j. $N^+(u) \cup \{u\} \subseteq N^+(w)$. Následne, vrchol w má viac výstupných susedov ako u, čo je spor. □

Ak n vrcholový turnaj T obsahuje vrchol u výstupného stupňa $\deg^+(u) = n-1$, tzv. *cisára*, tak je pomerne ľahké vidieť, že tento vrchol u je jediným kráľom v T.

Veta 1.21. *Každý turnaj bez cisára obsahuje aspoň troch kráľov.*

Dôkaz. Nech T je turnaj bez cisára a u vrchol maximálneho výstupného stupňa v rámci T. Podľa dôkazu Vety 1.20 vieme, že u je kráľom v T.

Spomedzi všetkých vrcholov, ktoré sú predchodcami u, vyberme vrchol v s maximálnym výstupným stupňom. Ukážeme, že v je kráľom v T. Predpokladajme opak. Potom existuje vrchol x taký, že v nie je predchodca x (teda $x \to v$ v T) a taktiež v nie je predchodca žiadneho predchodcu x (teda v T platí $x \to z$ pre všetky $z \in N^+(v)$). Následne $\{u, v\} \subseteq N^+(x)$ a tiež $N^+(v) \subseteq N^+(x)$. To znamená, že x je predchodcom u a $\deg^+(x) > \deg^+(v)$, čo predstavuje spor s výberom vrchola v a teda v musí byť kráľom v T.

Ďalej, nech w je vrchol s maximálnym výstupným stupňom spomedzi všetkých predchodcov vrchola v. Tvrdíme, že w je taktiež kráľom v T. Ak by to nebola pravda, v T by existoval vrchol y taký, že w nie je predchodca y a w nie je predchodcom žiadneho predchodcu vrchola y. Následne $y \to w$, $y \to v$ a naviac $y \to z$ pre všetky $z \in N^+(w)$, čo znamená $\deg^+(y) > \deg^+(w)$. Teda w je kráľom v T. □

1.5 Stromy a Eulerovské ťahy v digrafoch

Digraf D je *orientovaným lesom (stromom)* ak D vznikne orientáciou lesa (stromu). Digraf T je *o-stromom (i-stromom)*, ang. out-tree (in-tree), ak v T existuje práve jeden prameň, t.j. vrchol s s vstupným stupňom $\deg_T^-(s) = 0$ (práve jedno ústie, t.j. vrchol s výstupným stupňom $\deg_T^+(s) = 0$). Vrchol s sa nazýva *koreňom* T. O-strom T sa zvykne nazývať aj koreňovým stromom. Ak o-strom (i-strom) T je faktorovým poddigrafom digrafu D, t.j. $V(T) = V(D)$, tak T sa nazýva *o-vetviaca kostra (i-vetviaca kostra)* (z ang. out-branching resp. in-branching).

Keďže každý faktorový orientovaný podstrom (kostra) slabo súvislého digrafu D je acyklický, vzhľadom na Tvrdenie 1.3 obsahuje aspoň jeden prameň a aspoň jedno ústie. Teda pojmy o-vetviacej, resp. i-vetviacej kostry zachycujú dôležité prípady jedinečnosti príslušných typov vrcholov. Nasledujúce tvrdenie charakterizuje digrafy s o-vetviacimi kostrami, resp. i-vetviacimi kostrami.

Tvrdenie 1.22. *Slabo súvislý digraf D obsahuje o-vetviacu (i-vetviacu) kostru práve vtedy, keď D má práve jeden iniciálny (terminálny) silný komponent.*

Dôkaz. Danú charakterizáciu dokážeme pre prípad o-vetviacich kostier. Druhé tvrdenie týkajúce sa i-vetviacich kostier výplýva z prvého uvažovaním otočenia digrafu D.

Predpokladajme, že D má aspoň dva iniciálne silné komponenty a zároveň, že D obsahuje o-vetviacu kostru T. Nech r je koreňom T. Potom r nutne patrí do nejakého iniciálneho silného komponentu D. Ak x je ľubovoľný vrchol v nejakom inom iniciálnom silnom komponente D, tak v T existuje orientovaná (r, x)-cesta, a teda aj v D, čo je v rozpore s tým, že vrcholy r a x ležia v rozdielnych iniciálnych silných komponentoch.

Ďalej predpokladajme, že D obsahuje iba jeden iniciálny silný komponent D_1. Nech r je ľubovoľný vrchol patriaci do D_1. V digrafe silných komponentov $\mathsf{SC}(D)$ je D_1 jediným prameňom, teda podľa Tvrdenia 1.4 v $\mathsf{SC}(D)$je každý vrchol reprezentujúci silný komponent dosiahnuteľný z D_1. Následne, každý vrchol v D je dosiahnuteľný z vrchola r. Definujeme o-vetviaci strom T nasledovne. V prvom kroku T pozostáva z vrchola r. Nech $i \geq 1$. V kroku $i+1$, pridáme do T všetky vrcholy $z \in D$, ktoré ešte nie sú v T, spolu so šípkami $y \to z$, kde $y \to z$ je šípka v D pre nejaký vrchol y, pridaný do T v predchádzajúcom kroku i. Zastavíme, ak už žiadny ďalší vrchol nemožno pridať do T. Je pomerne ľahké vidieť, že $\mathsf{UG}(T)$ je acyklický. Naviac T obsahuje všetky vrcholy z D, keďže každý vrchol je dosiahnuteľný z r. Naviac r je jediný prameň v T, lebo každý iný vrchol pridaný do T je taktiež koncovým vrcholom nejakej šípky v T. Teda T je o-vetviacou kostrou. □

Poznamenávame, že orientovaný strom skonštruovaný v predchádzajúcom dôkaze sa taktiež nazýva BFS stromom digrafu D (viac podkapitola venovaná prehľadávaniu do šírky).

Orientovaný multigraf D sa nazýva *Eulerovský*, ak v D existuje uzavretý orientovaný ťah obsahujúci všetky šípky.

Veta 1.23. *Orientovaný multigraf D je Eulerovský práve vtedy, keď D je slabo súvislý a $\deg^+(x) = \deg^-(x)$ pre všetky vrcholy $x \in V(D)$.*

Dôkaz. Je jasné, že obe podmienky sú nutné pre existenciu Eulerovského ťahu v D. To, že sú aj postačujúce ukážeme konštruktívne, zostrojením Eulerovského ťahu T.

Môžme predpokladať, že D má aspoň dva vrcholy. Na začiatku je ťah T prázdny. Zvoľme ľubovoľný vrchol x v D. Keďže D je súvislý, v D existuje vrchol $y \in N^+(x)$. Pridáme vrchol x do T a taktiež aj šípku z x do y. Nakoľko $\deg^-(y) = \deg^+(y)$, existuje šípka (y, z) a následne pridáme vrchol y a šípku (y, z) do T. Podobným spôsobom postupujeme ďalej: akonáhle je do T pridaná šípka (u, v), v ďalšom kroku pridáme do T vrhcol v a nejakú šípku $a \notin T$, ktorej začiatok je vrchol v. Vzhľadom na podmienku $\deg^-(w) = \deg^+(w)$ pre všetky vrcholy $w \in V(D)$, tento proces môže byť ukončený jedine v prípade, že posledná šípka pridaná do T má koncový vrchol x a zároveň všetky šípky vychádzajúce z x už sú v T. Ak všetky šípky D sú v T, tak sme hotový. V prípade, že to tak nie je, keďže D je súvislý, musí existovať vrchol p patriaci do T, ktorý je počiatočným vrcholom nejakej šípky $(p, q) \notin T$. „Posuňme" cyklicky všetky vrcholy a šípky T tak, aby T začínal a končil vo vrchole p. Pridajme šípku (p, q) do T a aplikujme vyššie popísaný proces. Ten môže skončiť jedine v prípade, keď naposledy pridaná šípka má koniec v p a zároveň všetky šípky výchádzajúce z p už sú v T. Znova, buď všetky šípky D sú v T, alebo je možné nájsť nejaký vrchol na reštartovanie celého procesu. Keďže $V(D)$ je konečná, po niekoľkých opakovaniach bude ťah T obsahovať všetky šípky z D. □

Dôsledok 1.24. *Nech D je Eulerovský orientovaný multigraf a $\emptyset \neq W \subseteq V(D)$. Potom $\deg^+(W) = \deg^-(W)$.*

Dôkaz. Platia nasledujúce rovnosti

$$\sum_{w \in W} \deg^+(w) = |(W, W)| + \deg^+(W), \quad \sum_{w \in W} \deg^-(w) = |(W, W)| + \deg^-(W).$$

Avšak vzhľadom na predchádzajúcu vetu platí $\sum_{w \in W} \deg^+(w) = \sum_{w \in W} \deg^-(w)$, z čoho následne plynie rovnosť $\deg^+(W) = \deg^-(W)$. □

1.6 Prehľadávanie do hĺbky (DFS)

V tejto časti popíšeme jednoduchú, avšak veľmi dôležitú, techniku v algoritmickej teórii grafov, známu ako *prehľadávanie do hĺbky* (skrátene DFS, z ang. Depth-First Search).

Nech $D = (V, A)$ je digraf. V DFS začneme z ľubovoľného vrchola digrafu D. V každej fáze DFS **navštívime** nejaký vrchol $x \in V$. Ak x má **nenavštíveného** výstupného suseda y, tak navštívime vrchol y. Šípku $x \to y$ nazveme **stromovou** a pokračujeme ďalej vo vrchole y. Ak x už nemá nenavštíveného výstupného suseda, nazveme x **preskúmaným** a vrátime sa do predchodcu $\mathrm{pred}(x)$ vrchola x ($\mathrm{pred}(x)$ je vrchol, z ktorého sme sa pohli do x). Ak x nemá predchodcu, nájdeme ďalší nenavštívený vrchol a zreštartujeme popísanú procedúru. Ak taký vrchol neexistuje, ukončíme algoritmus.

Teraz popíšeme formálne DFS algoritmus. Každý vrchol x digrafu D obdrží dve čísla (časové známky): $\mathrm{tvisit}(x)$ v okamžiku keď x je navštívený a $\mathrm{texpl}(x)$ v okamžiku keď x je preskúmaný.

Algoritmus 1: Prehľadávanie do hĺbky DFS

Input: digraf $D = (V, A)$.

Output: pred(v), tvisit(v), texpl(v) pre všetky $v \in V$.

1 Pre každý vrchol $v \in V$ nastav: pred(v) := **null**, tvisit(v) := 0, texpl(v) := 0.
2 Nastav $time$:= 0.
3 **foreach** $v \in V$ **do**
4   **if** tvisit(v) = 0 **then**
5   vykonaj DFS-PROC(v)
6   **end**
7 **end**

Procedúra DFS-PROC

1 Nastav $time := time + 1$, tvisit(v) := $time$.
2 **foreach** $u \in N^+(v)$ **do**
3   **if** tvisit(u) = 0 **then**
4   pred(u) := v a vykonaj DFS-PROC(u)
5   **end**
6 **end**
7 Nastav $time := time + 1$, texpl(v) := $time$.

Čo sa časovej zložitosti DFS algoritmu týka, každý vrchol v je navštívený práve raz a aplikuje sa z neho najviac $\deg^+(v)$ ďalších prehľadávaní. Teda pre jeden konkrétny vrchol v máme $O(1)+O(\deg^+(v))$ úkonov. Celková zložitosť je teda $O(|V|+|A|)$, keďže podľa Vety 1.1 platí $\sum_{v \in V} \deg^+(v) = |A|$.

Pre daný digraf $D = (V, A)$, algoritmus DFS vytvorí digraf F s množinou vrcholov $V(F) = V$ a množinou šípok $A(F) = \{(\mathrm{pred}(x), x) : x \in V, \mathrm{pred}(x) \neq \textbf{null}\}$. Je pomerne ľahké vidieť, že priradenie $v \mapsto \mathrm{tvisit}(v)$ je acyklické očíslovanie digrafu F, teda F je acyklický. Digraf F nazývame *DFS lesom*, strom v F *DFS stromom*, *koreňom* DFS stromu je vrchol v použitý v bode 5 DFS algoritmu na iniciovanie DFS-PROC procedúry. Je očividné, že koreňom r nejakého DFS stromu T je jediný vrchol T, pre ktorý $\deg^-_T(r) = 0$.

1.7 Cvičenia

1. Dokážte, že $D \cong \mathsf{SC}(D)$ pre každý acyklický digraf.

2. Nech $T = (V, A)$ je taký turnaj, že každý jeho vrchol $v \in V$ leží na cykle. Dokážte, že $T - a$ je unilaterálny pre každú šípku $a \in A$.

3. Dokážte, že každý turnaj na $n \geq 2k + 2$ vrcholoch obsahuje vrchol s výstupným stupňom aspoň $k + 1$.

4. Dokážte, že ak turnaj obsahuje cyklus, tak v ňom existujú aspoň dve Hamiltonovské cesty.

Kapitola 2

Vzdialenosti v digrafoch

2.1 Terminológia a označenia

Nech $D = (V, A)$ je orientovaný pseudograf. Pripomíname, že pre podmnožinu $W \subseteq V$ sú množiny výstupných a vstupných susedov definované ako

$$N_D^+(W) = \bigcup_{w \in W} N_D^+(w) \setminus W \quad \text{a} \quad N_D^-(W) = \bigcup_{w \in W} N_D^-(w) \setminus W.$$

Položme $N_D^0(W) = W$, $N_D^{+1}(W) = N_D^+(W)$ a $N_D^{-1}(W) = N_D^-(W)$. Pre kladné p definujme *p-te výstupné okolie* množiny W nasledovne:

$$N_D^{+p}(W) = N_D^+(N_D^{+(p-1)}(W)) \setminus \bigcup_{i=1}^{p-1} N_D^{+i}(W).$$

Podobne je definované *p-te vstupné okolie* ako

$$N_D^{-p}(W) = N_D^-(N_D^{-(p-1)}(W)) \setminus \bigcup_{i=1}^{p-1} N_D^{-i}(W).$$

Nech $D = (V, A, c)$ je ohodnotený orientovaný multigraf s váhou $c\colon A \to \mathbb{R}$ na množine jeho šípok. Váha množiny šípok A' sa definuje ako súčet jednotlivých váh, t.j. $c(A') = \sum_{a \in A'} c(a)$. Ak S je nejaká podštruktúra digrafu D (poddigraf, sled, ťah, spárenie,…), tak váhou S myslíme váhu príslušnej množiny šípok. V ďalšom pod *(váženou) dĺžkou sledu* budeme rozumieť jeho váhu vzhľadom na uvažovanú váhovú funkciu c. *Negatívnym (zápornym) cyklom* v ohodnotenom digrafe $D = (V, A, c)$ rozumieme cyklus W, ktorého dĺžka (váha) $c(W)$ je záporné číslo.

V ďalšom predpokladáme, že ohodnotený digraf D neobsahuje negatívny cyklus, v opačnom prípade by nasledujúca definícia nedávala zmysel. Ak x a y sú vrcholy D, potom pod *orientovanou vzdialenosťou z x do y*, označovanou ako $\mathrm{dist}_D^c(x, y)$, rozumieme minimálnu dĺžku orientovaného (x, y)-sledu, ak y je dosiahnuteľný z x, v opačnom prípade $\mathrm{dist}_D^c(x, y) = \infty$. Keďže v D nie sú cykly negatívnej dĺžky, $\mathrm{dist}_D^c(x, x) = 0$ pre všetky $x \in V$. Vzhľadom na Tvrdenie 1.2 dostávame, že v D existuje nejaký najkratší (x, y)-sled, ktorý je cestou (ak v D neexistuje ani cyklus nulovej dĺžky, tak najkratší sled je vždy cestou). Ďalej, vzhľadom na Tvrdenie 1.2, orientovaná vzdialenosť spĺňa trojuholníkovú nerovnosť

$$\mathrm{dist}_D^c(x,z) \leq \mathrm{dist}_D^c(x,y) + \mathrm{dist}_D^c(y,z) \quad \text{pre všetky } x,y,z \in V. \tag{2.1}$$

Práve zavedená definícia orientovanej vzdialenosti pre ohodnotené digrafy (orientované multigrafy) je aplikovateľná aj v prípade neohodnotených digrafov (orientovaných multigrafov): jednoducho stačí definovať váhu každej šípky identicky rovnú jednej.

V ďalšom budeme používať nasledujúce označenie. Nech $P = x_1 \dots x_i \dots x_j \dots x_k$ je (x_1, x_k)-cesta (resp. ťah alebo sled). Symbolom $P[x_i, x_j]$ označíme (x_i, x_j)-cestu (ťah, sled), ktorý je podcestou (podťahom, podsledom) P.

Nasledujúce tvrdenie je pomerne „zrejmé“, avšak veľmi dôležité z hľadiska určovania najkratších ciest v ohodnotených digrafoch.

Tvrdenie 2.1. *Nech $D = (V, A, c)$ je ohodnotený digraf bez negatívnych cyklov. Ak $P = x_1x_2 \dots x_k$ je najkratšia (x_1, x_k)-cesta v D, tak $P[x_i, x_j]$ je najkratšou (x_i, x_j)-cestou pre ľubovoľné $1 \leq i \leq j \leq k$.*

Dôkaz. Predpokladajme, že x_iQx_j je (x_i, x_j)-cesta, ktorej dĺžka je menšia ako dĺžka cesty $P[x_i, x_j]$. Potom váha sledu $W = P[x_1, x_i]QP[x_j, x_k]$ je menšia ako dĺžka cesty P. Avšak vzhľadom k Tvrdeniu 1.2 a faktu, že D nemá negatívne cykly, W obsahuje podcestu R, ktorej dĺžka nepresahuje váhu W a teda je kratšia ako dĺžka P, čo predstavuje spor. □

2.2 Algoritmy pre nájdenie vzdialeností v digrafoch

2.2.1 Prehľadávanie do šírky (BFS)

V tejto časti popíšeme jednoduchý algoritmus, známy ako *prehľadávanie do šírky* (skrátene BFS z ang. Breadth-First Search). Tento postup umožňuje pomerne rýchlo určiť vzdielenosť od daného vrchola s k ostatným vrcholom neohodnoteného digrafu $D = (V, A)$. BFS je založený na nasledujúcej jednoduchej myšlienke.

Štartujúc vo vrchole s, navštívime všetkých susedov x dominovaných vrcholom s. Pre všetky takéto x položíme $\mathrm{dist}'(s, x) = 1$ a $\mathrm{pred}(x) := s$ (s je predchodcom x). Ďalej navštívime všetky doposiaľ nenavštívené vrcholy y, ktoré sú dominované vrcholmi x majúcimi vzdialenosť 1 od s. Položíme $\mathrm{dist}'(s, y) = 2$ a $\mathrm{pred}(y) := x$. Pokračujeme týmto spôsobom, až kým nedosiahneme všetky vrcholy, ktoré sú v digrafe D dosiahnuteľné z vrchola s (vzhľadom na Vetu 1.2, to nastane najneskôr po $n - 1$ iteráciách). Pre ostatné vrcholy z, nedosiahnuteľné z vrchola s, položíme $\mathrm{dist}'(s, z) = \infty$. Inými slovami, v prvom kroku navštívime 1. výstupné okolie $N_D^{+1}(s)$ vrchola s, v druhom 2. výstupné okolie $N_D^{+2}(s)$, atď. Nasleduje formálny popis BFS algoritmu.

Algoritmus 2: Prehľadávanie do šírky BFS

Input: digraf $D = (V, A)$.
Output: $\mathrm{dist}'(s, v)$ a $\mathrm{pred}(v)$ pre všetky $v \in V$.
1 Pre každý vrchol $v \in V$ nastav: $\mathrm{dist}'(s, v) = \infty$, $\mathrm{pred}(v) :=$ **null**.
2 Nastav $\mathrm{dist}'(s, s) := 0$ a vytvor frontu (fifo dátovú štruktúru) Q pozostávajúcu z vrchola s.
3 **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
4 $\quad u :=$ prvý prvok vo fronte Q, odober u preč z Q.
5 $\quad$ **forall** $x \in N^+(u)$ **do**
6 $\quad\quad$ **if** $\mathrm{dist}'(s, x) = \infty$ **then**
7 $\quad\quad\quad \mathrm{dist}'(s, x) := \mathrm{dist}'(s, u) + 1$, $\mathrm{pred}(x) := u$, vlož x na koniec fronty Q.
8 $\quad\quad$ **end**
9 $\quad$ **end**
10 **end**

Poznámka 2.1. Indukciou je možné dokázať, že ak v priebehu popísaného BFS algoritmu fronta Q obsahuje vrcholy $\langle v_1, v_2, \ldots, v_r \rangle$, kde v_1 je aktuálne prvým a v_r posledným vrcholom Q, tak $\mathrm{dist}'(s, v_1) \leq \mathrm{dist}'(s, v_2) \leq \cdots \leq \mathrm{dist}'(s, v_r) \leq \mathrm{dist}'(s, v_1) + 1$. Následkom toho, ak u a v sú vrcholy vložené do fronty Q v priebehu BFS algoritmu, pričom u je vložený pred v, tak $\mathrm{dist}'(s, u) \leq \mathrm{dist}'(s, v)$.

Poznamenávame, že po skončení BFS algoritmu $\mathrm{pred}(v) =$ **null** znamená buď $v = s$, alebo to, že v nie je dosiahnuteľný z vrchola s. Ak digraf D je zadaný pomocou zoznamu šípok, časová zložitosť popísaného BFS algoritmu je $O(|V| + |A|)$. To vyplýva z faktu, že Krok 1 vyžaduje $O(n)$ času a **while** cyklus (riadok 3 až 10) ho potrebuje v najhoršom prípade $O(m)$, keďže výstupný susedia každého vrchola sú uvažovaný iba raz a $\sum_{v \in V} \deg^+(v) = |A|$.

Tvrdenie 2.2. *BFS algoritmus je korektný, t.j.* $\mathrm{dist}'(s, x) = \mathrm{dist}(s, x)$ *pre všetky vrcholy* $x \in V$.

Dôkaz. Pripomíname, že $\mathrm{dist}(s, x)$ je dĺžka najkratšej orientovanej (s, x)-cesty v neohodnotenom digrafe $D = (V, A)$.

Nech $\mathrm{dist}'(s, x) = k$. Potom, vzhľadom na kroky 2 až 10 BFS algoritmu, $v_0 v_1 \ldots v_k$, kde $v_0 = s$, $v_k = x$ a $v_{i-1} = \mathrm{pred}(v_i)$ pre $i = 1, \ldots, k$, je (s, x)-cestou v digrafe D, teda $\mathrm{dist}(s, x) \leq k = \mathrm{dist}'(s, x)$. Indukciou vzhľadom na $\mathrm{dist}(s, x)$ ukážeme, že v skutočnosti platí rovnosť. Ak $\mathrm{dist}(s, x) = 0$ potom $x = s$ a rovnosť platí. Predpokladajme $\mathrm{dist}(s, x) = k > 0$ a uvažujme najkratšiu (s, x)-cestu P. Nech $y = x_P^-$ je predchodcom vrchola x na ceste P. Podľa indukčného predpokladu platí $\mathrm{dist}'(s, y) = \mathrm{dist}(s, y) = k - 1$. Keďže y dominuje x, vzhľadom na algoritmus (Poznámka 2.1), $\mathrm{dist}'(s, x) \leq \mathrm{dist}'(s, y) + 1 = k = \mathrm{dist}(s, x)$. Následne, v kombinácii s vyššie ukázanou nerovnosťou $\mathrm{dist}(s, x) \leq \mathrm{dist}'(s, x)$ dostávame, že platí rovnosť $\mathrm{dist}(s, x) = \mathrm{dist}'(s, x)$. $\square$

Nech $U \subseteq V(D)$ je podmnožina dosiahnuteľných vrcholov z vrchola s. Označme $B = \{(\text{pred}(v), v) : v \in U \setminus \{s\}\}$ množinu šípok „vytvorenú" v priebehu BFS algoritmu. Je pomerne ľahko vidieť, že (U, B) tvorí acyklický digraf, teda je to o-vetviaci strom s koreňom s. Tento strom sa nazýva *BFS stromom s koreňom s.*

2.2.2 Vzdialenosť v acyklických digrafoch

Nech $D = (V, A, c)$ je ohodnotený acyklický digraf. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že vrchol s je prameň, t.j. $\deg^-(s) = 0$. Nech $v_1, v_2, \ldots, v_n$ je acyklické očíslovanie vrcholov D s vlastnosťou $v_1 = s$. Definujme $d^c(s, v_1) = 0$ a pre všetky i, $2 \leq i \leq n$ položme:

$$d^c(s, v_i) = \begin{cases} \min\left\{d^c(s, v_j) + c(v_j, v_i) : v_j \in N^-(v_i)\right\}, \text{ ak } N^-(v_i) \neq \emptyset, \\ \infty, \text{ inak.} \end{cases} \tag{2.2}$$

Pozn.: Čo sa týka súčtu vo vzťahu (2.2), ako aj v nasledujúcom texte, vždy predpokladáme $\infty + r = \infty$ pre všetky $r \in \mathbb{R}$.

Pre všetky vrcholy $v \in V(D)$ platí vzťah $d^c(s, v) = \text{dist}^c(s, v)$. Korektnosť tohto vzťahu je možné ukázať indukciou vzhľadom na index i, označujúci poradie vrchola v danom acyklickom očíslovaní. Je jasné, že pre vrchol $s = v_1$ tvrdenie platí. Predpokladajme, že v_i je dosiahnuteľný z vrchola s (v opačnom prípade je $\text{dist}^c(s, v_i) = \infty$, čo je v súlade s (2.2)). Keďže očíslovanie vrcholov $v_1, v_2, \ldots, v_n$ je acyklické, vrcholy najkratšej c-váženej cesty P patria do množiny $\{v_1, v_2, \ldots, v_i\}$. Nech v_k je vrchol ležiaci na P taký, že $v_k \to v_i$. Vzhľadom na indukčný predpoklad máme $\text{dist}^c(s, v_k) = d^c(s, v_k)$, teda podľa Tvrdenia 2.1 pre dĺžku cesty $P = v_1 \ldots v_k v_i$ platí $\text{dist}^c(s, v_i) = \text{dist}^c(s, v_k) + c(v_k, v_i) = d^c(s, v_k) + c(v_k, v_i)$. Avšak výraz $d^c(s, v_k) + c(v_k, v_i)$ sa nachádza na pravej strane (2.2), čo znamená $d^c(s, v_i) \leq \text{dist}^c(s, v_i)$. Naopak je ľahké vidieť, že hodnota $d^c(s, v_i)$ odpovedá váhe nejakej (s, v_i)-cesty v D, teda musí platiť aj opačná nerovnosť $\text{dist}^c(s, v_i) \leq d^c(s, v_i)$.

Algoritmus hľadajúci najkratšiu vzdialenosť v ohodnotenom acyklickom digrafe D s n vrcholmi a m hranami, vychádzajúci zo vzťahu (2.2), má dve fázy. Prvá nájde acyklické očíslovanie vrcholov digrafu D a druhá implementuje (2.2). Keďže obe fázy je možné naprogramovať s časovou zložitosťou $O(n + m)$, celková zložitosť takéhoto algoritmu bude taktiež $O(n + m)$.

2.2.3 Dijkstrov algoritmus

V tejto časti popíšeme ďalší algoritmus, známy ako Dijkstrov algoritmus, ktorý nájde vzdialenosti v ohodnotenom digrafe $D = (V, A, c)$ od daného vrchola s k ostatným vrcholom digrafu D, a to za podmienky, že váhy všetkých šípok sú nezáporné.

Počas priebehu Dijkstrovho algoritmu je vrcholová množina rozdelená na dve časti P a Q. Naviac každému vrcholu $v \in V$ je priradený parameter δ_v, označujúci horné ohraničenie pre vzdialenosť $\text{dist}^c(s, v)$. Na začiatku sú všetky vrcholy v množine Q. V priebehu algoritmu sa vrcholy dosiahnuteľné z s postupne presunú z množiny Q do P.

Pokiaľ sa vrchol v nachádza v množine Q, jemu priradený parameter δ_v udáva horné ohraničenie pre hodnotu $\mathrm{dist}^c(s,v)$. Akonáhle je v presunutý do P, platí $\delta_v = \mathrm{dist}^c(s,v)$.

Algoritmus 3: Dijkstrov algoritmus

Input: ohodnotený digraf $D = (V, A, c)$, $c(a) \geq 0$ pre všetky $a \in A$, a počiatočný vrchol $s \in V$.

Output: parameter δ_v pre všetky $v \in V$ taký, že $\delta_v = \mathrm{dist}^c(s,v)$.

1 Nastav $P := \emptyset$, $Q := V$, $\delta_s := 0$ a $\delta_v := \infty$ pre každý vrchol $v \in V \setminus \{s\}$.
2 **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
3   Nájdi vrchol v taký, že $\delta_v = \min\{\delta_u : u \in Q\}$.
4   Nastav $Q := Q \setminus \{v\}$, $P := P \cup \{v\}$.
5     $\delta_u := \min\{\delta_u, \delta_v + c(v,u)\}$ pre všetky $u \in Q \cap N^+(v)$.
6 **end**

Lema 2.3. *V ľubovoľnom časovom okamžiku počas priebehu Dijkstrovho algoritmu platí* $\delta_v = \mathrm{dist}^c(s,v)$ *pre všetky vrcholy* $v \in P$.

Dôkaz. Je zrejmé, že pre $P = \emptyset$ tvrdenie platí. Naviac $\delta_s = 0 = \mathrm{dist}^c(s,s)$ teda tvrdenie bude platiť aj v prípade keď $P = \{s\}$ (vzhľadom na výber vrchola v kroku 3, vrchol s je vždy pridaný do P ako prvý).

Ďalej postupujme indukciou, t.j. nech P_0 je množina vrcholov vytvorená v priebehu algoritmu taká, že pre každý vrchol $x \in P_0$ platí $\delta_x = \mathrm{dist}^c(s,x)$. Nech u je ďalší vrchol pridaný k vrcholom z množiny P_0. Ukážeme, že tvrdenie platí pre všetky vrcholy z $P_0 \cup \{u\}$. Vzhľadom na indukčný predpoklad stačí ukázať, že $\delta_u = \mathrm{dist}^c(s,u)$.

Sporom predpokladajme, že $\delta_u > \mathrm{dist}^c(s,u)$ (opačná ostrá nerovnosť platiť nemôže, keďže v každom kroku algoritmu δ_u je buď rovné ∞ alebo váhe nejakej (s,u)-cesty, a teda horným ohraničením $\mathrm{dist}^c(s,u)$). Nech W je najkratšia (s,u)-cesta s váhou $c(W) = \mathrm{dist}^c(s,u)$. Nech y je prvý vrchol na ceste W, ktorý nepatrí do P_0 a $x \to y$ šípka z W, kde $x \in P_0$. Taký vrchol $y \in Q_0 = V \setminus P_0$ existuje, nakoľko W začína v P_0 a končí v u (mimo P_0). Potom $\mathrm{dist}^c(s,x) = \delta_x$ a keďže $y \in Q_0 \cap N^+(x)$ hodnota δ_y po pridaní x do $P' \subseteq P_0$ v kroku 5 bola upravená, resp. už spĺňala $\delta_y \leq \delta_x + c(x,y)$. Z Tvrdenia 2.1 a faktu, že W je najkratšia (s,u)-cesta, máme $\mathrm{dist}^c(s,y) = c(W[s,y]) = \mathrm{dist}^c(s,x) + c(x,y)$. Teda platí, s využitím toho, že všetky váhy sú nezáporné,

$$\delta_y \leq \delta_x + c(x,y) = \mathrm{dist}^c(s,x) + c(x,y) \leq \mathrm{dist}^c(s,u) < \delta_u$$

Ukázali sme $\delta_y < \delta_u$ pre $y, u \in Q_0$, to je ale v spore s výberom prvku u v kroku 3 algoritmu (prvok y mal byť vybraný pred u). □

Keďže po absolvovaní každého **while** cyklu je množina P inkrementovaná o nejaký prvok, v prípade $P = V$, vzhľadom na predchádzajúcu lemu, dostávame:

Tvrdenie 2.4. *Dijkstrov algoritmus je korektný, t.j. po jeho skončení* $\mathrm{dist}^c(s,v) = \delta_v$ *pre všetky vrcholy* $v \in V$.

Nech $D = (V, A, c)$ je digraf s n vrcholmi a m šípkami. Čo sa týka časovej zložitosti, na vykonanie kroku 3 (vybratie prvku v) treba rádovo $O(n)$ porovnaní na nájdenie $\min\{\delta_u : u \in Q\}$. Upravenie parametrov v kroku 5 zaberie rádovo tiež $O(n)$ času, teda jeden **while** cyklus zaberie rádovo $O(n) + O(n) = O(n)$ jednotiek času. Spomínaný **while** cyklus sa opakuje n krát, teda celková zložitosť popísaného algoritmu je $O(n^2)$.

V skutočnosti je možné Dijkstrov algoritmus implementovať (použitím tzv. Fibonacciho haldy) s časovou zložitosťou $O(n \log n + m)$.

2.2.4 Bellman-Ford-Mooreov algoritmus

Nech $D = (V, A, c)$ je ohodnotený digraf, pričom pripúšťame existenciu šípok so zápornou váhou. Algoritmus popísaný v tejto časti je možné aplikovať na nájdenie vzdialeností od daného vrchola s v D k ostatným vrcholom v D, za podmienky, že digraf D neobsahuje negatívny cyklus.

Pre daný vrchol $v \in V$ a nezáporné celé číslo $m \geq 0$ označme symbolom $\delta(v, m)$ dĺžku, t.j. váhu vzhľadom na ohodnotenie c, najkratšej (s, v)-cesty v D, ktorá má najviac m šípok. Ak vrchol v nie je dosiahnuteľný žiadnou cestou majúcou m alebo menej šípok, definujeme $\delta(v, m) = \infty$. Je jasné, že $\delta(s, 0) = 0$ a zároveň $\delta(v, 0) = \infty$ pre všetky $v \in V \setminus \{s\}$.

Lema 2.5. *Nech $v \in V$ je ľubovoľný vrchol a $m \geq 0$. Potom*

$$\delta(v, m+1) = \min\big\{\delta(v, m), \min\{\delta(u, m) + c(u, v) : u \in N^-(v)\}\big\}. \tag{2.3}$$

Dôkaz. Platnosť (2.3) dokážeme indukciou vzhľadom na parameter m. Pre $m = 0$ vzťah (2.3) triviálne platí, pretože vrchol v je v dosahu jednej šípky od s práve vtedy, keď $v \in N^+(s)$. V tomto prípade dá (2.3) hodnotu $\delta(v, 1) = c(s, v)$ a hodnotu $\delta(v, 1) = \infty$ ak $v \notin N^+(s)$.

Pre $m \geq 1$ predpokladajme, že existuje najkratšia (s, v)-cesta P, majúca nie viac ako $m + 1$ šípok. Ak P obsahuje najviac m šípok, tak pre jej dĺžku platí $c(P) = \delta(v, m)$. Inak P obsahuje $m + 1$ šípok a podľa Tvrdenia 2.1 pozostáva z najkratšej (s, u)-cesty $P[s, u]$ majúcej m šípok, kde $u \in N^-(v)$ je predposledný vrchol na P, a šípky $u \to v$. Pre jej dĺžku platí $c(P) = \delta(u, m) + c(u, v)$. V prípade, že vrchol v nie je dosiahnuteľný z vrchola s použitím najviac $m + 1$ šípok, tak neexistuje žiadny vstupný sused u vrchola v, pre ktorý by platilo $\delta(u, m) < \infty$. Teda vzťah (2.3) správne udáva hodnotu $\delta(v, m + 1) = \infty$. □

Nakoľko žiadna cesta v n vrcholovom digrafe D nemá viac ako $n - 1$ šípok, dostávame $\delta(v, n-1) = \mathrm{dist}^c(s, v)$ pre všetky vrcholy $v \in V \setminus \{s\}$. Teda postupným použitím vzťahu (2.3) pre $m = 0, 1, \ldots, n - 2$ získame vzdialenosti od s k ostatným vrcholom v D. Do nasledujúceho algoritmu zakomponujeme procedúru na detekciu negatívnych cyklov, takže ako vstup je možné uvažovať ľubovoľný ohodnotený digraf. Taktiež budeme uvažovať premennú $\mathrm{pred}(v)$, ktorej hodnota po skončení algoritmu bude dávať vrchol u, ktorý je predchodcom vrchola v na ležiacim na nejakej najkratšej (s, v)-ceste v digrafe D, ovšem iba za podmienky, že v D neexistujú negatívne cykly dosiahnuteľné z vrchola s.

Algoritmus 4: Bellman-Ford-Mooreov algoritmus

Input: ohodnotený digraf $D = (V, A, c)$ a vrchol $s \in V$.
Output: parameter δ_v a pred(v) pre všetky $v \in V$ a detekcia negatívneho cyklu dosiahnuteľného z vrchola s.

1 Nastav $\delta_s := 0$, pred(s) := **null** a $\delta_v := \infty$, pred(v) := **null** pre každý vrchol $v \in V \setminus \{s\}$.
2 **for** $i = 1$ *to* $|V| - 1$ **do**
3   **forall** $v \in V$ **do**
4         $\delta'_v := \delta_v$.   /* Zapamätanie si hodnoty $\delta(v, i-1)$. */
5   **end**
6   **forall** $(u, v) \in A$ **do**
7         $\delta_v := \min\{\delta_v, \delta'_u + c(u, v)\}$.   /* Výpočet $\delta(v, i)$. */
8   **if** *Ak došlo k zmene* δ_v **then**
9   pred$(v) := u$.
10   **end**
11   **end**
12 **end**

/* Detekcia negatívneho cyklu v D. */

13 **forall** $(u, v) \in A$ **do**
14   **if** $\delta_v > \delta_u + c(u, v)$ **then**
15   **return** D *obsahuje negatívny cyklus.*
16   **end**
17 **end**

Pozn.: Dá sa ukázať, že **forall** cyklus na riadku 6 až 11 upravuje hodnoty parametra δ_v pre všetky $v \in V$ v súlade so vzťahom (2.3). Teda ak v digrafe D nie je detegovaný negatívny cyklus, tak výstupné hodnoty pre každý vrchol $v \in V$ spĺňajú $\delta_v = \text{dist}^c(s, v)$. Hodnota pred$(v)$ = **null** znamená $v = s$ alebo fakt, že vrchol v nie je dosiahnuteľný z vrchola s.

Čo sa časovej zložitosti týka, pre $D = (V, A, c)$ s $|V| = n$ a $|A| = m$ je vidieť, že popísaný algoritmus vykoná $n - 1$ opakovaní hlavného **forall** cyklu (riadky 2 až 12), pričom tento cyklus trvá $O(n) + O(m)$ časových jednotiek. Celková časová zložitosť je teda (aj po započítaní detekcie negatívneho cyklu) $O(n) \cdot O(n + m) + O(m) = O(n \cdot (n + m))$.

V skutočnosti je možné **forall** cyklus (riadky 3 až 5) vynechať a úpravu parametra δ_v na riadku 7 zmeniť takto: $\delta_v := \min\{\delta_v, \delta_u + c(u, v)\}$. V tomto prípade už ale hodnota δ_v po ukončení i-tej iterácie hlavného **forall** cyklu nemusí odpovedať hodnote $\delta(v, i)$ z Lemy 2.5, ovšem bude platiť $\delta_v \leq \delta(v, i)$. Takto upravený algoritmus bude mať zložitosť $O(n \cdot m)$.

Veta 2.6. *Ohodnotený digraf D obsahuje negatívny cyklus dosiahnuteľný z vrchola s práve vtedy, keď* ***forall*** *cyklus (riadky 13 až 17) dá odpoveď, že D obsahuje negatívny cyklus.*

Dôkaz. Nech D neobsahuje negatívny cyklus. Po $n-1$ iteráciach hodnota δ_v označuje dĺžku najkratšej (s,v)-cesty v D. Potom pre každú šípku $(u,v) \in A$, vďaka trojuholníkovej nerovnosti (2.1) a faktu $\operatorname{dist}^c(u,v) \leq c(u,v)$, dostávame:

$$\delta_v = \operatorname{dist}^c(s,v) \leq \operatorname{dist}^c(s,u) + \operatorname{dist}^c(u,v) \leq \delta_u + c(u,v).$$

Naopak, nech D obsahuje negatívny cyklus $Z = v_1 v_2 \dots v_k v_1$ dosiahnuteľný z vrcholu s. Sporom predpokladajme, že procedúra na detekciu negatívnych cyklov nevráti odpoveď. Potom $\delta_{v_i} < \infty$ a pre šípky cyklu Z platí $\delta_{v_i} \leq \delta_{v_{i-1}} + c(v_{i-1}, v_i)$, kde $i = 1, \dots, k$ a $v_0 = v_k$. Teda

$$\sum_{i=1}^{k} \delta_{v_i} \leq \sum_{i=1}^{k} \delta_{v_{i-1}} + \sum_{i=1}^{k} c(v_{i-1}, v_i).$$

Keďže prvé dve sumy v predošlej nerovnosti sa rovnajú, pre poslednú sumu dostávame $0 \leq \sum_{i=1}^{k} c(v_{i-1}, v_i) = c(Z)$, čo je spor. □

2.2.5 Floyd-Warshallov algoritmus

Popíšeme algoritmus, ktorý nájde vzdialenosti medzi všetkými dvojicami vrcholov v ohodnotenom digrafe bez negatívnych cyklov. Jednou z možností je použiť Bellman-Ford-Mooreov algoritmus spustený n krát, čo vedie k časovej zložitosti $O(n^2 m)$. Floyd-Warshallov algoritmus nájde požadované vzdialenosti v čase $O(n^3)$.

Predpokladajme, že $D = (V, A, c)$ je ohodnotený digraf neobsahujúci negatívny cyklus (pripúšťame šípky zápornej váhy). Pre potreby tejto časti budeme predpokladať, že $V = \{1, 2, \dots, n\}$. Floyd-Warshallov algoritmus pracuje s pojmom vnútorného vrchola najkratšej cesty. Ak $P' = v_1 v_2 \dots v_l$ je cesta, tak *vnútorným* vrcholom cesty P' rozumieme ľubovoľný vrchol rôzny od počiatočného a koncového vrchola, teda ľubovoľný vrchol z množiny $\{v_2, \dots, v_{l-1}\}$. Pre k spĺňajúce $1 \leq k \leq n$ označme $[k] = \{1, 2, \dots, k\}$. Pre ľubovoľnú dvojicu $i, j \in V$ uvažujme všetky (i,j)-cesty, ktorých vnútorné vrcholy sú z množiny $[k]$. Poznamenajme, že každá takáto cesta má najviac $k+1$ šípok a je to (i,j)-cesta v indukovanom poddigrafe $D\big[[k] \cup \{i,j\}\big]$. Nech P je najkratšia cesta (vzhľadom na c) spomedzi týchto ciest. Z hľadiska vnútorných vrcholov máme nasledujúce možnosti:

- Ak k nie je vnútorným vrcholom cesty P, tak nutne všetky jej vnútorné vrcholy patria do množiny $[k-1]$. Teda najkratšia (i,j)-cesta s vnútornými vrcholmi z množiny $[k-1]$ je taktiež najkratšou (i,j)-cestou s vnútornými vrcholmi z množiny $[k]$.

- Ak k je vnútorným vrcholom cesty P, tak podľa Tvrdenia 2.1, podcesty $P[i,k]$ a $P[k,j]$ sú najkratšími (i,k)-, resp. (k,j)-cestami. Avšak vnútorné vrcholy cesty $P[i,k]$ patria do $[k-1]$, keďže vrchol k sa nemôže na ceste P vyskytovať viac ako raz. Teda $P[i,k]$ je najkratšou (i,k)-cestou, a podobne $P[k,j]$ je najkratšou (k,j)-cestou, s vnútornými vrcholmi z $[k-1]$.

Na základe tohto pozorovania uvedieme rekurzívnu formulu na určenie požadovaných vzdialeností. Pre dvojicu vrcholov $i, j \in V$ a $k \geq 0$ označme $d_{ij}^{(k)}$ ako dĺžku najkratšej (i, j)-cesty, ktorej vnútorné vrcholy patria do množiny $[k] = \{1, 2, \ldots, k\}$. Ak $k = 0$, tak $[k] = \emptyset$ a v tomto prípade, pre $i \neq j$, (i, j)-cesta buď pozostáva z jedinej šípky $(i, j) \in A$, alebo taká cesta vôbec neexistuje. Preto $d_{ij}^{(0)} = 0$ ak $i = j$, $d_{ij}^{(0)} = c(i, j)$ ak $(i, j) \in A$ a $d_{ij}^{(0)} = \infty$ inak, t.j. v prípade $i \neq j$ a $(i, j) \notin A$. Následne pre $k \geq 1$ dostávame nasledujúci rekurzívny vzťah

$$d_{ij}^{(k)} = \min\left\{d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}\right\}. \tag{2.4}$$

Pretože vnútorné vrcholy každej cesty v D sú v množine $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$, matica $\mathrm{DIST}^{(n)} = (d_{ij}^{(n)})$, získaná n násobným iterovaním vzťahu (2.4), je maticou vzdialeností v digrafe D, t.j. $d_{ij}^{(n)} = \mathrm{dist}^c(i, j)$ pre všetky $i, j \in V$.

Pri výpočte matice DIST je možné súbežne získať maticu predchodcov PRED, pomocou ktorej sa dá rekonštruovať najkratšia cesta. Pre vrcholy $i, j \in V$ a $1 \leq k \leq n$ premenná $\mathrm{pred}_{ij}^{(k)}$ označuje predchodcu vrchola j na najkratšej (i, j)-ceste obsahujúcej vnútorné vrcholy z množiny $[k]$. Ak $k = 0$, tak najkratšia (i, j)-cesta neobsahuje žiadne vnútorné vrcholy, teda

$$\mathrm{pred}_{ij}^{(0)} = \begin{cases} \textbf{null}, & \text{ak } i = j \text{ alebo } (i, j) \notin A, \\ i, & \text{ak } i \neq j \text{ a } (i, j) \in A. \end{cases}$$

Pre $k \geq 1$, ak najkratšia (i, j)-cesta obsahuje vrchol k, tak za predchodcu j vezmeme predposledný vrchol na príslušnej najkratšej (k, j)-ceste s vnútornými vrcholmi z $[k - 1]$, t.j. vrchol $\mathrm{pred}_{kj}^{(k-1)}$. V prípade, že najkratšia (i, j)-cesta neobsahuje vrchol k, tak predchodcom j bude vrchol $\mathrm{pred}_{ij}^{(k-1)}$, t.j. predposledný vrchol na najkratšej (i, j)-ceste s vnútornými vrcholmi z $[k - 1]$. Formálne, pre $k \geq 1$

$$\mathrm{pred}_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \mathrm{pred}_{ij}^{(k-1)}, & \text{ak } d_{ij}^{(k-1)} \leq d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}, \\ \mathrm{pred}_{kj}^{(k-1)}, & \text{ak } d_{ij}^{(k-1)} > d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}. \end{cases} \tag{2.5}$$

Matica $\mathrm{PRED}^{(n)} = (\mathrm{pred}_{ij}^{(n)})$ je tzv. matica predchodcov, využitím ktorej je spätným postupom možné nájsť najkratšiu (i, j)-cestu. Posledným vrcholom tejto cesty bude samozrejme vrchol $j = j_0$. Predposledným vrcholom bude $j_1 = \mathrm{pred}_{ij_0}^{(n)}$, jeho predchodcom vrchol $j_2 = \mathrm{pred}_{ij_1}^{(n)}$, atď. Formálne $j_0 = j$ a pre $l \geq 1$ je $j_l = \mathrm{pred}_{ij_{l-1}}^{(n)}$. Táto rekurzia sa ukončí, ak $j_l = i$ alebo $j_l = \textbf{null}$ pre nejaké l, $0 \leq l \leq n - 1$. V prvom prípade je najkratšou (i, j)-cestou v D cesta $ij_{l-1} \ldots j_1 j$, kým $j_l = \textbf{null}$ znamená, že (i, j)-cesta neexistuje.

Podobne ako Bellman-Ford-Mooreov algoritmus, aj Floyd-Warshallov je schopný detegovať prítomnosť negatívnych cyklov.

Lema 2.7. *Nech $i, j \in V$ je dvojica vrcholov, $0 \leq k \leq n$ a $l_1, l_2, \ldots l_r$ prostá postupnosť čísel z množiny $[k] \setminus \{i, j\}$. Potom $d_{ij}^{(k)} \leq \sum_{t=0}^{r} d_{l_t l_{t+1}}^{(0)}$, kde $l_0 = i$ a $l_{r+1} = j$.*

Dôkaz. Pre $k = 0$ a $i, j \in V$ jediná prípustná postupnosť je $l_0 = i, l_1 = j$, teda dostávame $d_{ij}^{(0)} \le \sum_{t=0}^{0} d_{l_t l_{t+1}}^{(0)} = d_{ij}^{(0)}$. Ďalej uvažujme $k \ge 1$, pričom predpokladáme, že tvrdenie platí pre hodnotu $k-1$ a ľubovoľnú dvojicu vrcholov $i, j \in V$.

Nech $i, j \in V$ a $p = l_1, l_2, \dots l_r$, $r \ge 1$ je prostá postupnosť čísel z množiny $[k] \setminus \{i, j\}$. Ak p neobsahuje k, tak vzhľadom na indukčný predpoklad máme $d_{ij}^{(k)} \le d_{ij}^{(k-1)} \le \sum_{t=0}^{r} d_{l_t l_{t+1}}^{(0)}$. V prípade, že $l_s = k$ pre nejaké $1 \le s \le r$, potom dostávame

$$d_{ij}^{(k)} \le d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} \le \sum_{t=0}^{s-1} d_{l_t l_{t+1}}^{(0)} + \sum_{t=s}^{r} d_{l_t l_{t+1}}^{(0)} = \sum_{t=0}^{r} d_{l_t l_{t+1}}^{(0)}.$$

□

Tvrdenie 2.8. *V ohodnotenom digrafe D existuje cyklus negatívnej dĺžky práve vtedy, keď $d_{ii}^{(n)} < 0$ pre nejaké $i \in V$.*

Dôkaz. Ak D neobsahuje negatívny cyklus, tak hodnota $d_{ii}^{(n)}$ daná vzťahom (2.4) korektne udáva váženú vzdialenosť $\mathrm{dist}^c(i, i) = 0$, teda $d_{ii}^{(n)} = 0$ pre všetky vrcholy $i \in V$.

Naopak predpokladajme, že $Z = l_0 l_1 \dots l_r l_{r+1}$ je negatívny cyklus v D, kde $l_0 = i = l_{r+1}$. Potom $d_{l_t l_{t+1}}^{(0)} = c(l_t, l_{t+1})$ pre každé $0 \le t \le r$ a vzhľadom na predchádzajúcu lemu dostávame $d_{ii}^{(n)} \le \sum_{t=0}^{r} d_{l_t l_{t+1}}^{(0)} = c(Z) < 0$. □

Popíšeme Floyd-Warshallov algoritmus. Nech $D = (V, A, c)$ je ohodnotený digraf, pričom $V = [n] = \{1, 2, \dots, n\}$. Ako vstup algoritmu budeme požadovať základnú maticu vzdialeností $\mathrm{DIST}^{(0)}$, ktorá v sebe zahŕňa štruktúru ohodnoteného digrafu D. Formálne, vstupom bude matica (d_{ij}) rozmeru $n \times n$

$$d_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ ak } i = j, \\ c(i, j), \text{ ak } i \ne j \text{ a } (i, j) \in A, \\ \infty, \text{ ak } i \ne j \text{ a } (i, j) \notin A. \end{cases}$$

Algoritmus 5: Floyd-Warshallov algoritmus

Input: matica (d_{ij}) zhodná s $\mathrm{DIST}^{(0)}$.
Output: matica $\mathrm{DIST}^{(n)}$, matica $\mathrm{PRED}^{(n)}$ a detekcia negatívneho cyklu v D.

Nastav $\mathrm{pred}_{ij} := i$ pre $i \neq j$ a $d_{ij} < \infty$, $\mathrm{pred}_{ij} :=$ **null** pre $i = j$ alebo $d_{ij} = \infty$.
for $k = 1$ *to* n **do**
    `/* Uloženie hodnoty` $d_{ij}^{(k-1)}$ `a` $\mathrm{pred}_{ij}^{(k-1)}$`. */`
    for $i = 1$ *to* n **do**
        for $j = 1$ *to* n **do**
            $d'_{ij} := d_{ij}$ a $\mathrm{pred}'_{ij} := \mathrm{pred}_{ij}$.
        end
    end
    `/* Aktualizácia` $d_{ij}^{(k)}$ `a` $\mathrm{pred}_{ij}^{(k)}$ `podľa` (2.4) `a` (2.5)`. */`
    for $i = 1$ *to* n **do**
        for $j = 1$ *to* n **do**
            if $d'_{ij} > d'_{ik} + d'_{kj}$ **then**
                $d_{ij} := d'_{ik} + d'_{kj}$ a $\mathrm{pred}_{ij} := \mathrm{pred}'_{kj}$.
            end
        end
    end
end
`/* Detekcia negatívneho cyklu v` D`. */`
for $i = 1$ *to* n **do**
    if $d_{ii} < 0$ **then**
        return *D obsahuje negatívny cyklus.*
    end
end

Je zrejmé, že časová zložitosť popísaného Floyd-Warshallovho algoritmu je $O(n^2) + n \cdot (O(n^2) + O(n^2)) + O(n) = O(n^3)$.

Tvrdenie 2.9. *Nech $D = (V, A, c)$ je ohodnotený digraf bez negatívnych cyklov. Potom Floyd-Warshallovho algoritmus nájde dĺžku najkratšej orientovanej cesty medzi ľubovoľnou dvojicou vrcholov z D v čase $O(n^3)$.*

Kapitola 3

Toky v sieťach

3.1 Siete

Sieťou budeme rozumieť usporiadanú päticu $\mathcal{N} = (V, A, s, t, c)$, kde $D = (V, A)$ je digrafom nazývaným tiež ako *podkladový digraf* siete $\mathcal{N}$, s, t dvojica význačných vrcholov nazývaných *zdroj (prameň)*, resp. *ústie* (v D nemusí platiť $\deg_D^-(s) = 0$ a $\deg_D^+(t) = 0$), a $c\colon A \to \mathbb{R}_0^+$ nezáporná reálna funkcia nazývaná *kapacitou.* Hodnota $c(a) = c(x, y)$ nejakej šípky $a = (x, y) \in A$ sa volá kapacitou hrany a. Vrcholy patriace do $\mathcal{N}$ rôzne od s a t sú tzv. *vnútorné vrcholy* siete $\mathcal{N}$.

Na prameň (zdroj) v sieti $\mathcal{N}$ je možné sa pozerať ako na miesto, z ktorého sú odosielané a následne transportované komodity pozdĺž siete $\mathcal{N}$ do cieľovej destinácie, menovite ústia tejto siete. O kapacite šípky (x, y) je možné uvažovať ako o maximálnom množstve tovaru, ktorý je možné poslať z vrchola x do vrchola y pozdĺž šípky (x, y) za jednotku času.

Vo všeobecnosti je možné uvažovať zložitejší model sietí. Napríklad sieť typu $\mathcal{N} = (V, A, l, u, b, w)$ kde $l\colon A \to \mathbb{R}_0^+$ označuje dolnú kapacitu (minimálne množstvo tovaru, ktoré musí byť odoslané pozdĺž šípky), $u\colon A \to \mathbb{R}_0^+$ označuje hornú kapacitu (maximálne množstvo tovaru, ktoré je možné poslať po šípke), pričom $l(x, y) \leq u(x, y)$ pre každú šípku $(x, y) \in A$. Funkcia $b\colon V \to \mathbb{R}$ označuje tzv. balančný vektor (hodnota $b(v)$, pre $v \in V$, označuje množstvo tovaru, ktoré má „ostať“ vo vrchole v pri transporte tovaru pozdĺž siete). Nakoniec $w\colon A \to \mathbb{R}$ určuje cenu za prepravu jednotky tovaru po uvažovanej šípke.

3.2 Toky

Nech $D = (V, A)$ je digraf a $g\colon A \to \mathbb{R}$ reálna funkcia definovaná na množine šípok. Pre podmnožiny $X, Y \subseteq V$ definujeme

$$g(X, Y) = \sum_{(x,y)\in(X,Y)} g(x, y),$$

pričom $g(X, Y) = 0$ ak $(X, Y) = \emptyset$. Pre vrchol $x \in V$ položíme

$$g^+(x) = \sum_{y\in N^+(x)} g(x, y) \quad \text{and} \quad g^-(x) = \sum_{y\in N^-(x)} g(y, x).$$

Všeobecnejšie, pre $X \subseteq V$

$$g^+(X) = \sum_{x \in X} g^+(x) \quad \text{and} \quad g^-(X) = \sum_{x \in X} g^-(x).$$

Nech $\mathcal{N} = (V, A, s, t, c)$ je sieť so zdrojom s, ústim t a kapacitou hrán c. *Tokom* v sieti $\mathcal{N}$ rozumieme funkciu $f\colon A \to \mathbb{R}$ s reálnymi hodnotami, definovanú na množine šípok, spĺňajúcu tzv. Kirkhoffove zákony

$$0 \leq f(x,y) \leq c(x,y) \text{ pre všetky } (x,y) \in A \tag{3.1}$$

a

$$f^+(x) = f^-(x) \text{ pre všetky } x \in V \setminus \{s,t\}. \tag{3.2}$$

Interpretácia týchto podmienok je zrejmá: (3.1) vraví, že po žiadnej hrane netečie viac ako je jej prípustná kapacita a (3.2), že pre všetky vnútorné vrcholy platí „čo do vrchola pritečie, aj z neho odtečie“.

Ak f je funkcia daná predpisom $f(a) = 0$ pre všetky šípky $a \in A$, tak f vyhovuje podmienkam (3.1) a (3.2), je teda tokom, ktorý sa nazýva *nulový tok*.

Ak f je tok, tak hodnota $f(a) = f(x,y)$ pre $a = (x,y)$ sa nazýva tokom pozdĺž šípky a. V prípade, že $f(a) = c(a)$ pre nejakú šípku $a \in A$, tak a sa nazýva *nasýtená* vzhľadom na tok f. Naopak, ak $f(a) < c(a)$, tak šípka a je *nenasýtená*.

Veta 3.1. *Nech $\mathcal{N} = (V, A, s, t, c)$ je sieť so zdrojom s, ústim t a f je tokom v sieti $\mathcal{N}$. Potom celková hodnota toku vytekajúceho zo zdroja s je rovná celkovej hodote toku pritekajúceho do ústia t, t.j.*

$$f^+(s) - f^-(s) = f^-(t) - f^+(t).$$

Dôkaz. Platí $f^+(V) = f^-(V) = \sum_{a \in A} f(a)$, teda

$$\sum_{x \in V} f^+(x) = \sum_{x \in V} f^-(x).$$

Vzhľadom na podmienku (3.2) máme $f^+(x) = f^-(x)$ pre $x \neq s, t$, z čoho dostávame

$$f^+(s) + f^+(t) = f^-(s) + f^-(t).$$

□

3.2.1 Maximálne toky

Hodnotou toku f v sieti $\mathcal{N}$ rozumieme $\operatorname{val}(f) = f^+(s) - f^-(s)$, t.j. celkový tok vytekajúci zo zdroja s. Vzhľadom na Vetu 3.1 tiež platí, že $\operatorname{val}(f)$ je rovná celkovému toku pritekajúcemu do ústia t.

Tok, ktorého hodnota je maximálna spomedzi všetkých tokov definovaných na sieti $\mathcal{N}$ sa nazýva *maximálnym tokom*. Teda tok f definovaný na sieti $\mathcal{N}$ je maximálny, ak $\operatorname{val}(f) \geq \operatorname{val}(f')$ pre všetky toky f' definované na $\mathcal{N}$.

Nech $\mathcal{N}$ je sieť so zdrojom s a ústim t. Pre $X \subseteq V$ označme doplnok množiny X symbolom $\overline{X} = V \setminus X$. *Rezom* v $\mathcal{N}$ rozumieme množinu šípok $(X, \overline{X})$, kde $s \in X$ a $t \in \overline{X}$. Ak $K = (X, \overline{X})$ je rez v sieti $\mathcal{N}$, potom *kapacita rezu* K, označovaná ako $\operatorname{cap}(K)$ je definovaná ako

$$\operatorname{cap}(K) = c(X, \overline{X}) = \sum_{(x,y)\in(X,\overline{X})} c(x, y).$$

Ak K je rezom v $\mathcal{N}$, tak každá (s, t)-cesta musí obsahovať aspoň jednu hranu z K. Následkom toho, odstránenie všetkých šípok z K by viedlo k separácii dvojice vrcholov s a t.

Nech f je tok v sieti $\mathcal{N}$ a $(X, \overline{X})$ rez. Potom pre celkovú hodnotu toku $f^+(X) - f^-(X)$ vytekajúceho z X platí

$$f^+(X) - f^-(X) = \sum_{x\in X} f^+(x) - \sum_{x\in X} f^-(x) = \sum_{x\in X} \sum_{y\in N^+(x)} f(x, y) - \sum_{x\in X} \sum_{y\in N^-(x)} f(y, x) =$$

$$\sum_{x\in X} \Big(\sum_{\substack{y\in N^+(x)\\ y\in X}} f(x, y) + \sum_{\substack{y\in N^+(x)\\ y\in \overline{X}}} f(x, y)\Big) - \sum_{x\in X} \Big(\sum_{\substack{y\in N^-(x)\\ y\in X}} f(y, x) + \sum_{\substack{y\in N^-(x)\\ y\in \overline{X}}} f(y, x)\Big) =$$

$$f(X, X) + f(X, \overline{X}) - f(X, X) - f(\overline{X}, X) = f(X, \overline{X}) - f(\overline{X}, X).$$

Teda dostávame

$$f^+(X) - f^-(X) = f(X, \overline{X}) - f(\overline{X}, X) \tag{3.3}$$

Využitím tejto rovnosti ukážeme, že hodnota toku nikdy nepresiahne kapacitu ľubovoľného rezu.

Veta 3.2. *Nech f je tok v sieti $\mathcal{N}$ a $K = (X, \overline{X})$ rez v $\mathcal{N}$. Potom*

$$\operatorname{val}(f) = f^+(X) - f^-(X) \leq \operatorname{cap}(K).$$

Dôkaz. Keďže $f^+(x) - f^-(x) = 0$ pre všetky vrcholy $x \in X \setminus \{s\}$, dostávame

$$f^+(X) - f^-(X) = \sum_{x\in X} \big(f^+(x) - f^-(x)\big) = f^+(s) - f^-(s) = \operatorname{val}(f).$$

Naviac $0 \leq f(a) \leq c(a)$ pre každú šípku $a \in A$, teda

$$\operatorname{val}(f) = f^+(X) - f^-(X) = f(X, \overline{X}) - f(\overline{X}, X) \leq f(X, \overline{X}) \leq c(X, \overline{X}) = \operatorname{cap}(K).$$

□

Vo všeobecnosti v danej sieti existuje veľa rôznych rezov s príslušnými kapacitami. Rez, ktorého kapacita je minimálna spomedzi všetkých rezov sa nazýva *minimálny*. To znamená, že rez K je minimálny, ak $\operatorname{cap}(K) \leq \operatorname{cap}(K')$ pre všetky rezy K' v $\mathcal{N}$.

Dôsledok 3.3. *Ak f je tok v sieti $\mathcal{N}$ a K rez v $\mathcal{N}$ taký, že $\operatorname{val}(f) = \operatorname{cap}(K)$, tak f je maximálny tok a K minimálny rez v $\mathcal{N}$.*

Dôkaz. Ak f^* je maximálny tok a K^* minimálny rez, tak vzhľadom na Vetu 3.2 platí $\mathrm{val}(f^*) \leq \mathrm{cap}(K^*)$. Následne

$$\mathrm{val}(f) \leq \mathrm{val}(f^*) \leq \mathrm{cap}(K^*) \leq \mathrm{cap}(K).$$

Vzhľadom na predpoklad $\mathrm{val}(f) = \mathrm{cap}(K)$ nastávajú rovnosti $\mathrm{val}(f) = \mathrm{val}(f^*)$ a $\mathrm{cap}(K^*) = \mathrm{cap}(K)$, teda f je maximálny tok a K minimálny rez. □

Dôsledok 3.4. *Ak f je tok v sieti $\mathcal{N}$ s kapacitou šípok $c\colon A \to \mathbb{R}_0^+$ a $(X, \overline{X})$ rez v $\mathcal{N}$ taký, že*

$$f(a) = c(a) \textit{ pre všetky } a \in (X, \overline{X})$$

a

$$f(a) = 0 \textit{ pre všetky } a \in (\overline{X}, X),$$

tak f je maximálny tok a $(X, \overline{X})$ minimálny rez v $\mathcal{N}$.

Dôkaz. Pre hodnotu $\mathrm{val}(f)$ toku f spĺňajúceho predpoklady dostávame

$$\mathrm{val}(f) = f(X, \overline{X}) - f(\overline{X}, X) = c(X, \overline{X}) - 0 = \mathrm{cap}(X, \overline{X}).$$

Vzhľadom na Dôsledok 3.3 f je maximálny tok a $(X, \overline{X})$ minimálny rez. □

Pre digraf D, pod (x, y)-*polocestou* rozumieme striedavú postupnosť

$$P = (x = w_0, a_1, w_1, a_2, w_2, \dots, w_{k-1}, a_k, w_k = y)$$

vrcholov a šípok z D, začínajúcu v x, končiacu v y, pričom buď $a_i = (w_{i-1}, w_i)$ alebo $a_i = (w_i, w_{i-1})$ pre všetky $i = 1, \dots, k$. V súlade s orientáciou šípky sa $a_i = (w_{i-1}, w_i)$ nazýva *doprednou* a $a_i = (w_i, w_{i-1})$ *spätnou* šípkou polocesty P.

Nech $\mathcal{N} = (V, A, s, t, c)$ je sieť so zdrojom s, ústim t, kapacitou hrán c, na ktorej je definovaný tok f. Povieme, že (s, t)-polocesta

$$P = (s = w_0, a_1, w_1, a_2, w_2, \dots, w_{k-1}, a_k, w_k = t)$$

v podkladovom digrafe $D = (V, A)$ je *f-rozširujúcou polocestou*, ak pre všetky indexy $i = 1, \dots, k$ platí

(i) a_i je nenasýtená, t.j. $f(a) < c(a)$, ak a_i je doprednou šípkou P

(ii) $f(a_i) > 0$, ak a_i je spätnou šípkou P.

Ak $x, y \in V$ sú ľubovoľné vrcholy, tak (x, y)-polocesta spĺňajúca podmienky (i) a (ii) sa nazýva *f-nenasýtenou*. Poznamenajme, že triviálna polocesta (bez šípok) je vždy f-nenasýtenou.

Veta 3.5 (**L. R. Ford, D. R. Fulkerson** 1956)**.** *Nech $\mathcal{N}$ je sieť s podkladovým digrafom D. Potom tok f je maximálny práve vtedy, keď v D neexistuje žiadna f-rozširujúca polocesta.*

Dôkaz. Predpokladajme, že v D existuje f-rozširujúca polocesta

$$P = (s = w_0, a_1, w_1, a_2, w_2, \dots, w_{k-1}, a_k, w_k = t).$$

Potom každá zo šípok a_i je buď dopredná (pre ňu platí $f(a_i) < c(a_i)$), alebo spätná (v tomto prípade $f(a_i) > 0$). Označme $p_1 = \min\{c(a_i) - f(a_i) : a_i \text{ je dopredná šípka}\}$ a $p_2 = \min\{f(a_i) : a_i \text{ je spätná šípka}\}$, pričom ak jedna z množín je prázdna, formálne položíme $\min \emptyset = \infty$. Nech $p = \min\{p_1, p_2\}$. Definujme funkciu f' na množine šípok nasledovne:

$$f'(a) = \begin{cases} f(a) + p & \text{ak } a \text{ je doprednou šípkou } P \\ f(a) - p & \text{ak } a \text{ je spätnou šípkou } P \\ f(a) & \text{ak } a \notin A(P). \end{cases}$$

Je ľahké vidieť, že takto definovaná funkcia f' je tokom v sieti $\mathcal{N}$, pričom pre jeho hodnotu platí $\mathrm{val}(f') = \mathrm{val}(f) + p$, teda tok f nie je maximálny.

Naopak predpokladajme, že v D neexistuje žiadna f-rozširujúca polocesta. Nech $X \subseteq V$ je množina všetkých vrcholov x, pre ktoré existuje f-nenasýtená (s, x)-polocesta v D. Potom $s \in X$ a podľa predpokladu $t \notin X$, teda $K = (X, \overline{X})$ je rezom v $\mathcal{N}$.

Nech (y, z) je šípkou v K. Keďže $y \in X$, v D existuje f-nenasýtená (s, y)-polocesta. Ak by neplatilo $f(y, z) = c(y, z)$, tak spomínanú f-nenasýtenú polocestu by bolo možné predĺžiť po vrchol z, čo je v spore s $z \in \overline{X}$. Podobne $f(u, v) = 0$ ak $(u, v) \in (\overline{X}, X)$. Teda $K = (X, \overline{X})$ je rez v $\mathcal{N}$, pre ktorý platí $f(a) = c(a)$ pre všetky $a \in (X, \overline{X})$ a $f(a) = 0$ pre všetky $a \in (\overline{X}, X)$. Následne, vzhľadom na Dôsledok 3.4, tok f je maximálny. □

Využitím dôkazu predlošlej vety je možné dokázať nasledujúcu vetu, ktorá je v literatúre známa ako The Max-Flow Min-Cut Theorem (L. R. Ford, D. R. Fulkerson 1956).

Veta 3.6 (The Max-Flow Min-Cut Theorem). *V ľubovoľnej sieti je hodnota maximálneho toku rovná kapacite minimálneho rezu, t.j. existuje tok f a rez K také, že* $\mathrm{val}(f) = \mathrm{cap}(K)$.

Dôkaz. Nech f je maximálny tok v sieti $\mathcal{N}$ s kapacitou hrán c. Podľa tvrdenia a dôkazu Vety 3.5, v sieti neexistuje f-rozširujúca polocesta a následne existuje rez $K = (X, \overline{X})$, pre ktorý

$$f(a) = \begin{cases} c(a) & \text{ak } a \in (X, \overline{X}) \\ 0 & \text{ak } a \in (\overline{X}, X). \end{cases}$$

Vzhľadom na (3.3) a Dôsledok 3.4 dostávame, že K je minimálny rez, t.j.

$$\mathrm{val}(f) = f(X, \overline{X}) - f(\overline{X}, X) = c(X, \overline{X}) - 0 = \mathrm{cap}(K).$$

□

Literatúra

[1] Bang-Jensen J., Gutin G. Z.: Digraphs: Theory, Algorithms and Applications, Springer-Verlag London, 2009.

[2] Bondy A., Murty U.S.R.: Graph Theory, Springer-Verlag London, 2008.

[3] Matoušek J., Nešetřil J.: Kapitoly z diskrétní matematiky, Nakladatelství Karolinum, 2010.

Register